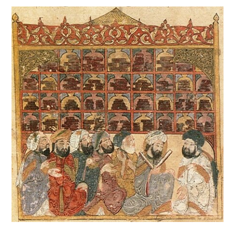
Les *quatre-pages* du groupe AHMES
Auteurs : Ahmed Bendjeddou, Alex Esbelin

IREM de
Clermont-Ferrand

Calculs sur les irrationnels quadratiques chez al-Māhānī (IXe siècle), d'après un manuscrit arabe copié en 969

Position du problème en termes contemporains : « simplifier » $\sqrt{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$ dans le cas où a et b sont des rationnels non tous les deux carrés de rationnels.



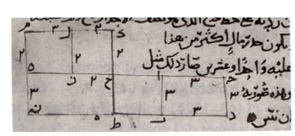
Érudits dans une bibliothèque abbasside, source : Wikipedia.

Abū-Abdullah Muḥammad bin ʻĪsa Māhānī est né à Mahan, en Perse aux alentours de 820. Astronome, il a réalisé des observations depuis Bagdad à l'aide d'un astrolabe. Mathématicien, il a écrit des commentaires de quelques livres des Éléments d'Euclide. Omar Khayyam lui attribue l'étude d'un problème posé par Archimède consistant à découper une sphère en deux à l'aide d'un plan, de telle manière que les deux solides en résultant aient des volumes dans un rapport donné : al-Māhānī le réduit à une équation du type $x^3+c^2b=cx^2$ qu'il n'a pas su résoudre. Il est mort à Bagdad vers 880. Le texte étudié est un manuscrit copié en 969 dont le contenu lui est attribué.

Le calife Al-Mamūn et Jean le Grammairien, source : Wikiwand

Les sciences ont connu une grande prospérité pendant le califat abbasside du VIII^{e} au XIII^{e} siècles, avec un mouvement de traduction principalement depuis le grec impulsé par les califes qui faisaient venir des livres de toutes les régions de leur empire et de Constantinople dans l'Empire byzantin, avec l'expansion de l'enseignement public et la construction d'écoles et d'institutions comme *Bayt al-hikma* (« la Maison de la sagesse »), académie scientifique dotée d'une bibliothèque, avec l'émergence de nombreux savants et penseurs.

Le livre X des *Éléments* d'Euclide étudie par des méthodes géométriques des longueurs irrationnelles de carrés commensurables (multiples entiers d'une même unité de mesure) : classification, opérations de somme, de différence et de moyenne géométrique (soit dans nos termes numériques, de racine carrée). On y trouve une preuve de l'incommensurabilité de la diagonale et du côté d'un carré (notre irrationnalité de $\sqrt{2}$). En termes modernes, il y étudie les sommes (appelées *binômes*) et différences (appelées *apotomes*) de racines carrées de nombres rationnels.



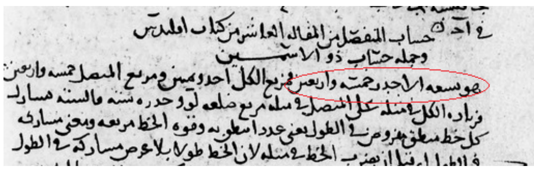
extrait d'une copie du XIV^{e} du livre d'al-Khwārizmī, source : Wikipedia.

Al-Khwārizmī(780 env. - 850 env.), dans le *Kitāb al-jabr wa-l-muqābala* (*Livre sur la restauration et la comparaison*) rédigé à Bagdad entre 813 et 833, résout de façon systématique les équations de degré 2. Par le succès de ce livre, il a suscité le décollage de l'algèbre. *Al-jabr* (la restauration, la réduction de fracture) consiste à ajouter à un terme ce qui en a été retranché et *al-muqābala* (la comparaison, la confrontation, l'opposition) revient à supprimer un même terme dans les deux membres d'une équation.

Le Livre X des *Éléments* d'Euclide est considéré comme un livre de géométrie par Pappus d'Alexandrie (IV^{e} siècle) et par Ibn al-Haytham (XI^{e} siècle). Appuyés sur l'algèbre d'al-Khwārizmī, les commentaires de ce livre par al-Māhānī et quelques autres en présentent les problèmes géométriques à travers des équations algébriques. Dans son commentaire, al-Māhānī étudie et classifie les grandeurs irrationnelles quadratiques et cubiques, en les considérant comme des nombres à part entière bien qu'il utilise également un point de vue géométrique pour les désigner. Il donne en outre une approche algébrique des irrationnels, en expliquant que si l'on additionne ou multiplie un irrationnel et un rationnel (non-nul dans le cas du produit), le résultat est irrationnel.

Etude du texte

Le manuscrit coté BnF Arabe 2457, f°181v°-187r° est disponible sur le site de la BnF https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/btv1b11001636f/f189.item. Toutes les traductions (encadrées) sont de Marouane Ben Miled (voir note bibliographique). Les encadrés gris contiennent des adaptations à notre style mathématique.



9-$\sqrt{45}$

Calcul de l'apotome du Dixième Livre de l'ouvrage d'Euclide et résumé du calcul du binôme

Les nombres sont écrits avec leur noms et non avec des chiffres. Il n'y a pas de symbolisme.

En termes contemporains, les apotomes sont des différences de racines de nombres rationnels $\sqrt{r}-\sqrt{r'}$ de rapport $\frac{\sqrt{r}}{\sqrt{r'}}$ irrationnel. Le livre X en distingue six catégories suivant la rationnalité de $\sqrt{\dfrac{r-r'}{r}}$, $\sqrt{r}$ et $\sqrt{r'}$. Dans le texte de Al-Māhānī, chaque catégorie est étudiée à travers un exemple numérique.

Le premier apotome

[Un exemple du premier apotome] est neuf moins racine de quarante-cinq. Pour connaître sa racine, sache que la racine du premier apotome est aussi un apotome.

Al-Māhānī sait par le texte d'Euclide (voir page 4) que la racine cherchée peut être écrite $\sqrt{u}-\sqrt{v}$. Une condition suffisante de l'égalité $9-\sqrt{45}=\left(\sqrt{u}-\sqrt{v}\right)^2$ est le système ci-dessous, dont il part :

Partage le tout, qui est neuf, en deux parties dont le produit est comme le quart du carré du congru, qui est quarante-cinq, et dont le quart est onze et quart. Pour partager neuf en deux parties dont le produit soit onze et quart, nous procédons par la voie d'*al-jabr* et *al-muqābala*. Nous disons alors que nous savons qu'une partie est une chose et l'autre neuf moins une chose. La multiplication de neuf moins une chose par une chose donne neuf choses moins un *māl* qui est égal à onze et quart. Alors opère *al-jabr* et *al-muqābala* : il vient onze et quart et un *māl* qui est égal à neuf choses. Le problème devient alors des *māl* plus un nombre est egal à des racines. Effectue cela en partageant les racines en deux moitiés et multiplie-les par elles-mêmes, ce qui donne vingt et quart. Soustrais-en le nombre qui est avec le *māl* et qui est onze et quart, il reste neuf, sa racine est trois. Tu l'ôtes de la moitié des racines, qui est quatre et demi, il reste un *dirham* et une demi-chose. C'est l'une des parties de neuf, l'autre est sept et demi. Or sept et demi multiplie par un et demi est onze et quart, qui est comme la moitié de la racine de quarante-cinq multipliée par elle-même. [...] La racine du premier apotome est [...] la racine de sept et demi moins la racine d'un *dirham* et demi.

$$\mathbf{A_1=9-\sqrt{45}}.$$

Soit u et v tels que :

$$\begin{cases} 9=u+v \\ u.v=\frac{45}{4}=11+\frac{1}{4} \end{cases}$$

On détermine maintenant u et v par la méthode algébrique ; on a ([a]) $uv=u(9-u)=9u-u^2$.

On résout donc l'équation :

$$x^2+11+\frac{1}{4}=9x$$

dont le discriminant réduit est :

$$\left(\frac{9}{2}\right)^2-\left(11+\frac{1}{4}\right)=3^2$$

et dont les racines sont $\frac{9}{2}-3=1+\frac{1}{2}$ et $\frac{9}{2}+3=7+\frac{1}{2}$.

Or $\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(7+\frac{1}{2}\right)=11+\frac{1}{4}=\left(\frac{45}{2}\right)^2$.

[...] Donc

$$\sqrt{\mathbf{A_1}}=\sqrt{\mathbf{7+\frac{1}{2}}}-\sqrt{\mathbf{1+\frac{1}{2}}}$$

a. En algèbre, *māl* désigne le carré de la chose recherchée.

Il est possible de vérifier l'équivalence de l'égalité $9-\sqrt{45}=\left(\sqrt{u}-\sqrt{v}\right)^2$ et du système étudié en s'appuyant sur l'irrationnalité de $\sqrt{45}$. Mais cette équivalence est inutile si on admet l'unicité de la racine de $9-\sqrt{45}$.

La vérification qui vient maintenant n'a pas de plus value logique : elle transcrit les vérifications faites par Euclide dans le cadre géométrique.

> Pour le vérifier, nous multiplions la racine de sept et demi moins la racine de un et demi par elle-même. La racine de sept et demi par elle-même est sept et demi. Nous multiplions moins racine de un et demi par elle-même, ce qui donne un et demi. La racine de sept et demi par moins la racine de un et demi deux fois donne moins racine de onze et quart deux fois. Alors multiplie deux par deux qui sont quatre. Puis multiplie cela par onze et quart qui donne quarante-cinq. Donc le premier apotome est neuf moins racine de quarante-cinq et sa racine est racine de sept et demi moins racine de un et demi.

$$\left(\sqrt{7+\frac{1}{2}}-\sqrt{1+\frac{1}{2}}\right)^2=\left(7+\frac{1}{2}\right)+\left(1+\frac{1}{2}\right)-2\sqrt{7+\frac{1}{2}}\sqrt{1+\frac{1}{2}}=9-\sqrt{4\frac{45}{4}}=9-\sqrt{45}.$$

Les cinq autres apotomes

Ils sont aussi traités à partir d'exemples.

$A_2=\sqrt{45}-5$. Soit u et v tels que $\begin{cases}\sqrt{45}=u+v\\ u.v=\frac{5^2}{4}=6+\frac{1}{4}\end{cases}$. On détermine maintenant u et v algébriquement : on a $x(\sqrt{45}-x)=\sqrt{45.(x^2)}-x^2$. On résout donc l'équation $x^2+6+\dfrac{1}{4}=\sqrt{45.(x^2)}$. En élevant au carré, on obtient $39+\dfrac{1}{2.8}+x^2.x^2=\left(32+\dfrac{1}{2}\right)x^2$. C'est une équation bicarrée. Le discriminant réduit est $\left(16+\dfrac{1}{4}\right)^2-\left(39+\dfrac{1}{8}\right)=225=15^2$, et les racines sont $\left(16+\dfrac{1}{4}\right)\pm 15$. Donc $\sqrt{A_2}=\sqrt[4]{31+\dfrac{1}{4}}-\sqrt[4]{1+\dfrac{1}{4}}$.

Les passages suivants montrent que

$$\begin{array}{ll}\sqrt{\sqrt{54}-\sqrt{30}}=\sqrt[4]{37+\frac{1}{2}}-\sqrt[4]{1+\frac{1}{2}} & \sqrt{6-\sqrt{24}}=\sqrt{3+\sqrt{3}}-\sqrt{3-\sqrt{3}}\\ \sqrt{\sqrt{60}-6}=\sqrt[4]{15+\sqrt{6}}-\sqrt[4]{15-\sqrt{6}} & \sqrt{\sqrt{60}-\sqrt{40}}=\sqrt[4]{15+\sqrt{5}}-\sqrt[4]{15-\sqrt{5}}\end{array}.$$

.

Par exemple, le calcul de la racine de $A_3=\sqrt{54}-\sqrt{30}$ (que l'auteur connaît d'après le livre X) suit les étapes suivantes : il cherche u et v tels que $\begin{cases}\sqrt{54}=u+v\\ u.v=\frac{30}{4}=7+\frac{1}{2}\end{cases}$. L'équation $x^2+7+\frac{1}{2}=\sqrt{54x^2}$ est résolue en passant par $x^2.x^2+56+\dfrac{1}{4}=39x^2$ obtenu en élevant au carré. Les racines de cette équation (par l'algorithme de al-Khwārizmī) sont $1+\dfrac{1}{2}$ et $\sqrt{54}-\sqrt{1+\dfrac{1}{2}}$. Le carré de $\sqrt{54}-\sqrt{1+\dfrac{1}{2}}$ est $37+\dfrac{1}{2}$ donc $\sqrt{54}-\sqrt{1+\dfrac{1}{2}}=\sqrt{37+\dfrac{1}{2}}$ et $\sqrt{A_3}=\sqrt[4]{37+\frac{1}{2}}-\sqrt[4]{1+\frac{1}{2}}$.

Ces résultats font tous l'objet d'une vérification.

À propos des binômes

Les binômes - étymologiquement : à deux noms - sont des sommes définies et distinguées comme les apotomes.

> Le premier binôme est une seule droite, c'est six en nombre, qui est la plus grande partie, plus racine de vingt, qui est la plus petite partie.

L'auteur cite encore cinq cas de binôme, mais ne procède au calcul d'aucune de leur racines.

> Terminé par la grâce de Dieu et Sa faveur. Que la bénediction de Dieu soit sur Muhammad et sa famille. Ecrit par Ahmad b. Muhammad à partir de la copie de Sayyidī Abū al-Hasan le géomètre et avec sa correction, à Shiraz, à la fin de *sha'bān* de l'année hégirienne 358. ([a])
>
> a. L'an 969 de l'ère chrétienne.

Compléments

• Dans le livre X des *Éléments*, un apotome est la différence de deux grandeurs de carrés commensurables à une grandeur donnée, incommensurables entre elles. La grandeur donnée est représentée par un segment $[AB]$. Dans la proposition 91, l'auteur part de l'apotome $[AD]$, où D appartient à $[AE]$, supposé du premier type (i.e. en termes contemporains de mesure rapportée à l'unité $[AB]$, avec AE et $\sqrt{AE^2 - DE^2}$ rationnelles et DE irrationnelle).

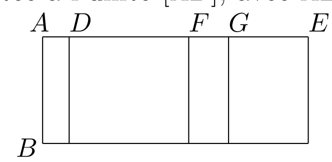


figure 1

Il donne la construction suivante d'un segment $[LN]$ tel que $\mathbf{LN^2 = AD.AB}$ qui permet de montrer en outre que **LN est un apotome**. Soit F le milieu de $[DE]$ (voir figure 1).
Euclide a décrit dans le livre VI une méthode de construction d'un point G tel que $AG.GE = FE^2$. Elle est résumée dans la figure 2 ci-contre : I est le milieu de $[AE]$; $IXUE$ est un carré ; le théorème de Pythagore permet de construire un carré $WXYZ$ d'aire égale à $IE^2 - FE^2$. Le point G convient car $AG.GE$ est égal à l'aire de l'equerre $IWZYUE$.

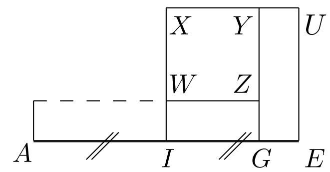


figure 2

Euclide construit maintenant deux segments $[LP]$ et $[NP]$ tels que $\mathbf{LP^2 = AG.AB}$ et $\mathbf{NP^2 = EG.AB}$ (par des méthodes bien connues) puis le carré de la figure 3 (qui est l'équivalent géométrique du dévelopement $LP^2 = NP^2 + LN^2 + 2LN.NP$).

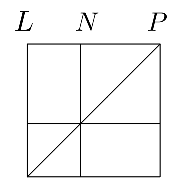


figure 3

Comme $LP^2.NP^2 = AG.AB.EG.AB$, on a $LP.NP = FE.AB = DF.AB$, d'où $LN.NP = LP.NP - NP^2 = FE.AB - EG.AB = FG.AB$.
On a donc $NP^2 + 2LN.NP = DG.AB$ d'où $LN^2 = AD.AB$.
L'égalité $\mathbf{LN = LP - NP}$ montre que LN est un apotome après vérification des propriétés de commensurabilités).

• Abū Kāmil, mathématicien égyptien du IXe siècle, est le premier à accepter qu'un nombre irrationnel défini par une racine puisse être solution ou coefficient d'une équation. Al-Samaw'al, mathématicien de Bagdad du XIIe siècle d'origine maghrébine, réussit, en utilisant les nombres négatifs, à donner des algorithmes de calcul pour l'addition, la soustraction, le produit, la division et l'extraction des racines carrées (quand elle est possible) de sommes de racines. Roshdi Rashed a souligné l'importance des commentaires arabes du Livre X dans les premiers développements de l'algèbre pour l'extension du domaine des nombres aux irrationnels algébriques et le développement du calcul algébrique. Il a montré comment *L'Algèbre* d'al-Khwārizmī a donné naissance à deux voies de recherches opposées : alors que Thābit bin Qurra fondait la théorie des équations du second degré sur des démonstrations géométriques, un courant de traduction des problèmes géométriques dans les termes de l'algèbre se développait ; il accompagne l'étude des quantités irrationnelles qui apparaissent lors des résolutions des équations algébriques et élargit à celles-ci les règles de calcul de l'arithmétique.

⋆ La première édition du texte d'al-Māhānī, avec traduction et analyse, est due à M. Ben Miled dans « Les commentaires d'al-Māhānī et d'un anonyme du Livre X des Éléments d'Euclide », *Arabic Sciences and Philosophy* vol. 9 (1999) p. 89-156.
⋆ Sur le portail des IREM, une page est consacrée au livre d'al-Khwārizmī.
⋆ R. Rashed (ed.), *Histoire des sciences arabes*, 3 vol., Paris, 1997.
⋆ Ahmed Djebbar, *L'algèbre arabe : genèse d'un art*, Paris, Vuibert/Adapt, 2005.

Les nombres ont lentement remplacé les grandeurs dans la pratique mathématique, de même que les symboles se sont progressivement substitués aux mots. Nombres et symboles sont devenus pour les praticiens des mathématiques les objets les plus naturels, les plus concrets. Mais, pour citer P. Langevin, « Le concret, c'est de l'abstrait rendu familier par l'usage ». Cette accoutumance a pris un millénaire, pendant lesquels les esprits les plus brillants ont « remis l'ouvrage sur le métier », ressassé, ruminé. On l'oublie souvent face aux élèves.

Point de vue sous la responsabilité des auteurs du quatre-pages.