Pietro Mengoli, Préface du *Novæ quadraturæ arithmeticæ,...*, 1650

Divergence de la série harmonique, convergence de la série de terme général $\frac{2}{i(i+1)}$
problème de la série de terme général $\frac{1}{i^2}$

Position du problème : Mengoli veut calculer ce que nous appelons des sommes de séries, ou étudier ce que nous appelons leur comportement asymptotique. En particulier, il démontre que la somme $1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}+...+\dfrac{1}{n}$ peut prendre des valeurs arbitrairement grandes, résultat que nous nommons la divergence de la série harmonique.

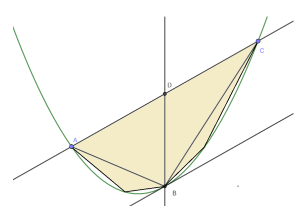
Portrait de Mengoli, source : Wikipedia.

Mengoli est né à Bologne en 1626 ou 1627. Il y étudie à l'université dont il devient docteur (en philosophie et en droit) puis professeur, succédant à Cavalieri dont il a été l'élève. Ordonné prêtre en 1660, il cumule ses fonctions académiques avec la direction d'une paroisse. Polymathe (comme beaucoup de savants jusqu'au XVIII^e siècle), ses premiers travaux connus portent sur la musique et l'harmonie ; mais il est surtout un mathématicien connu et productif, dont certains élèves (comme Gregory) ont eu de grandes carrières. Il est mort à Bologne en 1686.

Étudiants de l'université de Bologne, 1497, source : Wikipedia.

L'université de Bologne est l'une des premières créées en Europe, dès le XII^e siècle. Parmi les professeurs, on trouve S. del Ferro (arithmétique et géométrie de 1496 à 1526), J. Cardan (médecine de 1516 à 1520), B. Cavalieri (mathématiques de 1629 à 1647), P. Mengoli (mathématiques de 1647 à 1686), G. D. Cassini (géométrie et astronomie dans les années 1650). L. Ferrari y a été étudiant et assistant. Parmi les grands mathématiciens italiens de la productive période entre 1550 et 1650, peu n'ont pas fréquenté cette université : l'autodidacte N. Fontana dit Tartaglia, R. Bombelli formé auprès d'un architecte - ingénieur, G. Galilei et E. Torricelli tous deux liés à d'autres universités.

Les sommes de longueur non bornées (que nous appelons séries) apparaissent dans deux domaines :



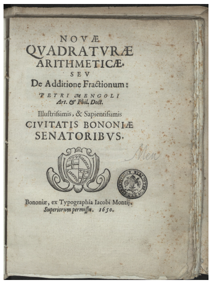
$\star$ dans le cadre des quadratures de surfaces non polygonales, où elles représentent les aires de polygones approchant la surface à quarrer ; la quadrature de la parabole par Archimède introduit ainsi une suite de polygones dont les aires sont données par une série géométrique : avec nos notations, il utilise le fait que $\dfrac{4}{3}-\displaystyle\sum_{i=0}^{i=n}\left(\dfrac{1}{4}\right)^i$ peut être rendu arbitrairement petit.

Ces méthodes sont développées par les mathématiciens arabes, avant d'être modifiées par l'introduction des indivisibles. Mengoli s'inscrit dans ce cadre et emploie occasionnellement le mot *quadrature* pour la détermination de la somme d'une série.

$\star$ Dans le cadre d'une réflexion sur la nature de l'espace ou du temps ; certains paradoxes de Zenon peuvent être étudiés en introduisant des séries géométriques ; les universités européennes relancent cette étude au Moyen Âge : Oresme produit la première preuve connue de la divergence de la série harmonique.

Le traité de Mengoli est le premier texte connu étudiant de manière systématique les sommes de séries numériques. Dans les décennies suivantes, le sujet prend une ampleur considérable avec les travaux des Bernoulli et de Euler sur les séries numériques et l'utilisation des séries de fonctions chez Newton entre autres.

Etude du texte

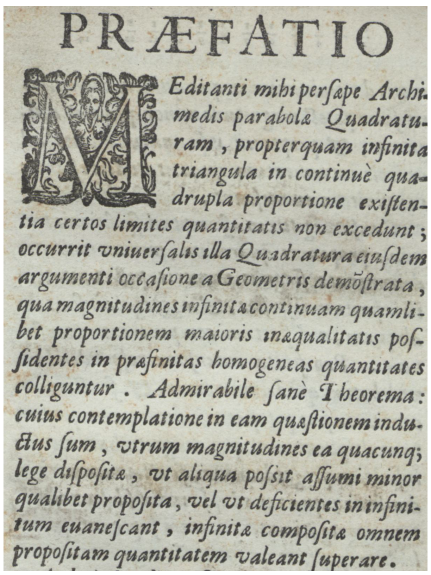


NOVÆ
QVADRATVRÆ
ARITHMETICÆ,
SEV
De Additione Fractionum:
PETRI MENGOLI
Art. & Phil. Doct.
Illustrissimis, & Sapientissimis
CIVITATIS BONONIÆ
SENATORIBVS.

Bononiæ, ex Typographia Iacobi Montij.
Superiorum permissu. 1650.

Texte disponible sur le site du Centro di Ricerca Matematica "Ennio De Giorgi" à Pise.

Dans une lettre à Collins, Barrow écrit : « son langage est si fruste (uncouth) et ambigu, ses définitions si nombreuses et obscures, que je pense qu'il serait plus facile [...] d'apprendre l'arabe que son dialecte[....] Je peux difficilement trouver le temps et je n'ai de toute façon pas assez de patience pour comprendre (pierce into the depth) ses obscurités. ». Nous traduisons parfois près du texte pour que le lecteur puisse apprécier ce commentaire. Toutes les traductions (encadrées) sont de l'auteur.



PRÆFATIO

Meditanti mihi persæpe Archimedis parabolæ Quadraturam, propterquam infinita triangula in continuè quadrupla proportione existentia certos limites quantitatis non excedunt; occurrit vniuersalis illa Quadratura eiusdem argumenti occasione a Geometris demõstrata, qua magnitudines infinitæ continuam quamlibet proportionem maioris inæqualitatis possidentes in præfinitas homogeneas quantitates colliguntur. Admirabile sanè Theorema: cuius contemplatione in eam quæstionem inductus sum, vtrum magnitudines ea quacunq; lege dispositæ, vt aliqua possit assumi minor qualibet proposita, vel vt deficientes in infinitum euanescant, infinitæ compositæ omnem propositam quantitatem valeant superare.

Réfléchissant souvent sur la quadrature de la parabole par Archimède, par laquelle une infinité de triangles en proportion quadruple continue([a]) ne dépasse pas certaines bornes, me vint à l'esprit la quadrature universelle , ..., par laquelle une infinité de grandeurs en une proportion continue d'une plus grande inégalité([b]) sont ajoutées pour former une quantité déterminée de même nature. Un théorème admirable en effet : par la contemplation duquel j'ai été amené à cette question : ces grandeurs sont-elles réglées par une loi quelconque, soit que toutes [ensembles] soient plus petites qu'une grandeur proposée soit que, [bien que] décroissant et disparaissant à l'infini, ajoutées indéfiniment, elles puissent dépasser toute quantité donnée.

a. i.e. dont les aires forment une suite géométrique de raison $\frac{1}{4}$.
b. i.e. en une suite géométrique de raison plus petite.

La divergence de la série harmonique

Décidé à essayer des fractions arithmétiques, je les ai disposées ainsi, de telle manière que les dénominateurs soient tous les nombres à partir de l'unité $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{5}$ $\frac{1}{6}$ $\frac{1}{7}$ $\frac{1}{8}$ $\frac{1}{9}$ $\frac{1}{10}$ $\frac{1}{11}$ $\frac{1}{12}$ $\frac{1}{13}$ $\frac{1}{14}$
[....] Je cherchais donc un argument pour décider si les inverses de tous les nombres à partir de l'unité, disposés à l'infini, pris ensemble constitueraient une étendue infinie ou finie. Il semblait que la réponse devait être en faveur d'une étendue finie, puisque les variations des nombres et des fractions s'opposent : celle des nombres en multiplication, par laquelle les quantités progressent vers l'infini, mais celle des fractions en division, par laquelle la chose se réduit à des indivisibles([a]). [....] Ce sophisme était la raison pour laquelle j'espérais, pendant presque un mois entier, que je pourrais me prononcer en faveur de cette réponse à la question ; mais lorsque j'examine maintenant la procédure de preuve, mon jugement change pour l'autre point de vue.

a. C'est un mot à mot : le lecteur est invité à se faire sa propre idée de l'intuition de Mengoli

Avec des notations contemporaines (en particulier en notant H_n la somme des inverses des n premiers entiers supérieurs ou égaux à 2), le raisonnement de Mengoli que nous détaillons ci-dessous est le suivant : remarquant que pour tout i, on a $\dfrac{1}{3i-1}+\dfrac{1}{3i}+\dfrac{1}{3i+1} > 3\dfrac{1}{3i} = \dfrac{1}{i}$, on déduit que :

$$H_{3k+1} = \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right) + ... + \left(\frac{1}{3k-1}+\frac{1}{3k}+\frac{1}{3k+1}\right) > 1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{k} = 1 + H_k.$$

En itérant, on obtient :

$$H_{3^n+3^{n-1}+...+3+1} = H_{3(3^{n-1}+...+3+1)+1} \geq 1 + H_{3^{n-1}+...+3+1} \geq ... \geq n.$$

Première partie de la preuve :

[....] Dans les fractions proposées, des grandeurs identiques [au numérateur] ont pour dénominateurs des nombres en progression arithmétique ; en conséquence, trois [termes] successifs A, B, C sont en progression harmonique. Et A a à C le même rapport que l'excès de A sur B a à l'excès de B sur C. De plus A est plus grand que C. Donc l'excès de A sur B est plus grand que l'excès de B sur C. Et la somme de A et C est plus grande que deux fois B. Et la somme des trois [termes] A, B et C est plus grande que le triple du [terme] médian B.

Les inverses A, B, C d'une progression arithmétique constituent par définition une progression harmonique et satisfont([a])

$$\frac{A}{C} = \frac{A-B}{B-C}.$$

Comme $A > C$, on a $A - B > B - C$ donc $A+C > 2B$ donc $A+B+C > 3B$.

[a] Propriété connue depuis l'antiquité grecque.

Deuxième partie de la preuve :

Donc, par cet argument, les fractions de cet arrangement prises trois par trois à la fois à partir du premier, $\frac{1}{2}\ \frac{1}{3}\ \frac{1}{4}\quad \frac{1}{5}\ \frac{1}{6}\ \frac{1}{7}\quad \frac{1}{8}\ \frac{1}{9}\ \frac{1}{10}\quad \frac{1}{11}\ \frac{1}{12}\ \frac{1}{13}\quad \frac{1}{14}\ \frac{1}{15}\ \frac{1}{16}$ sont supérieures à trois fois les termes moyens : et les termes moyens sont des unités ayant pour dénominateur des nombres multipliés par trois, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{12}$, et dont les triples sont 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, les mêmes qui, dans le raisonnement ci-dessus, pris trois par trois sont supérieurs à trois fois les termes moyens. Donc les fractions données de l'arrangement, prises en nombres donnés par une progression géométrique de raison 3, soit 3, 9, 27, 81([a]), dépassent toutes les unités. Pour tout nombre donné, on peut prendre autant de nombres en progression géométrique de raison 3, et alors les fractions de l'arrangement proposé prises en fonction de la somme de ces nombres dépasseront le nombre donné. Donc les fractions proposées, disposées à l'infini et prises ensemble, sont en mesure de remplir une étendue infinie.

[a] On réalise des blocs dont les longueurs sont des puissances de 3

Mengoli donne ensuite en exemple la somme $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+...+\frac{1}{13}\right)+\left(\frac{1}{14}+...+\frac{1}{40}\right)+\left(\frac{1}{41}+...\frac{1}{121}\right)$ supérieure à 4.

Puis il tire deux corollaires : le résultat reste le même si on commence la suite des dénominateurs à partir de n'importe quel entier ainsi que si les dénominateurs forment une suite arithmétique quelconque.

La convergence de la série de terme général $\frac{2}{i(i+1)}$

Mengoli démontre que la somme de tous les inverses des nombres triangulaires, c'est-à-dire de la forme $1+2+...+n = \frac{n(n+1)}{2}$, est égale à 1. C'est sans doute ce premier exemple de série télescopique qui l'a conduit à en envisager d'autres et à en construire une théorie qui est l'objet du traité.

La somme de la série des inverses des carrés

Mengoli ouvre le problème de la limite de $\displaystyle\sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{i^2}$ dont il a échoué à trouver la somme.

Heureusement délivré de la contemplation [du précédent] arrangement de fractions, je passai à un autre arrangement, dans lequel les unités ont pour dénominateurs des nombres carrés. Cette étude a bien rapporté des fruits, cependant elle n'a pas encore pleinement abouti, mais elle nécessite le secours d'un talent plus efficace, pour trouver la somme exacte de l'arrangement que je me suis proposé.

Les sommes télescopiques.

La préface se termine sur l'annonce de quelques-uns des résultats qui feront l'objet de l'ouvrage, par exemple $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2+3i} = \frac{11}{18}$, avec un raisonnement qui semble être le suivant :

$$S = \frac{1}{4}+\frac{1}{10}+\frac{1}{18}+\frac{1}{28}+\frac{1}{40}+... = \left(\frac{1}{4}+\frac{1}{28}+\frac{1}{70}+...\right)+\left(\frac{1}{10}+\frac{1}{40}+\frac{1}{88}+...\right)+\left(\frac{1}{18}+\frac{1}{54}+\frac{1}{108}+...\right)$$

$$S = \left(\frac{1}{3}-\frac{1}{12}+\frac{1}{12}-\frac{1}{21}+\frac{1}{21}-\frac{1}{30}+...\right)+\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{15}+\frac{1}{15}-\frac{1}{24}+\frac{1}{24}-\frac{1}{33}+...\right)+\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{18}+\frac{1}{18}-\frac{1}{27}+...\right)$$

$$S = \frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{9} = \frac{11}{18}$$

Compléments

• La première démonstration connue de la divergence de la série harmonique est celle de Nicole Oresme (vers 1320 - 1382) dans son ouvrage *Questiones super geometriam Euclidis* oublié jusqu'au XX$^{\text{e}}$ siècle. Il regroupe les termes par blocs dont les longueurs sont en progression géométrique de raison 2 : $\left(\dfrac{1}{1+2^{k-1}}+\cdots+\dfrac{1}{2^k}\right)$ contient 2^{k-1} termes. Chacun étant supérieur ou égal à $\frac{1}{2^k}$, cette somme est supérieure à $\frac{1}{2}$. Oresme conclut « il y a ici une infinité de parties dont chacune sera plus grande que la moitié d'une unité, donc le tout sera infini »(*ibi existunt infinite partes quarum quelibet erit maior quam medietas pedis, ergo totum erit infinitum*).

• À la fin du XVII$^{\text{e}}$, la famille Bernoulli aborde l'étude des séries numériques. Dans le *Tractatus de seriebus infinitis* annexé à l'*Ars conjectandi*..., Jakob commence par le calcul suivant :

$$1=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+...\right)-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+...\right)=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+...=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+...,$$

avouant qu'il doit être conduit « non sans précaution » (*non sine cautela*). Par la suite, son traitement de la divergence de la série harmonique est basé sur une somme d'une infinité de séries infinies. Soit $A=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{5}+....=\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{6}+\dfrac{3}{12}+\dfrac{4}{20}+....$ qui est égal à la somme par colonne des séries suivantes :

$$\begin{array}{lllll}
C= & \frac{1}{2}+ & \frac{1}{6}+ & \frac{1}{12}+ & \frac{1}{20}+...=1\\
D= & & \frac{1}{6}+ & \frac{1}{12}+ & \frac{1}{20}+...=C-\frac{1}{2}=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\\
E= & & & \frac{1}{12}+ & \frac{1}{20}+...=D-\frac{1}{6}=\frac{1}{2}-\frac{1}{6}=\frac{1}{3}\\
F= & & & & \frac{1}{20}+...=E-\frac{1}{12}=\frac{1}{3}-\frac{1}{12}=\frac{1}{4}
\end{array}$$

Or aussi $C+D+E+F+...=1+A$ soit $A=1+A$.
A ne peut donc être un nombre fini.

⋆ Sur les travaux de Mengoli, peu d'études en français sont disponibles. On peut lire l'article de l'excellente revue canadienne Accromath à l'adresse (consultée le 23/01/2024)
https://accromath.uqam.ca/2021/10/euler-et-le-probleme-de-bale/.
⋆ Les textes de la spécialiste italienne de Mengoli Maria R. Massa Esteve sont disponibles en ligne.
⋆ L'étude de référence en anglais est *Pietro Mengoli's 1650 Proof that the Harmonic Series Diverges* de J. Bell et V. Blåsjö publiée dans Philosophy Mathematics Magazine 2018 disponible en ligne sur le site de « Utrecht University Repository ».

De nombreux sites présentent abusivement le raisonnement de Mengoli sur la divergence de la série harmonique sous la forme suivante, dans laquelle il opèrerait sur la somme de la série infinie :

> [Mengoli] regroupe les termes trois par trois, en observant que pour tout $n \geq 2$:
> $$\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}>\frac{3}{n}.$$
> Il en déduit que :
> $$1+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+...+\left(\frac{1}{3k-1}+\frac{1}{3k}+\frac{1}{3k+1}\right)+...$$
> est strictement supérieur à
> $$1+\frac{3}{3}+\frac{3}{6}+\frac{3}{9}+...+\frac{3}{3k}+...$$
> Si la série harmonique avait une somme s finie, celle-ci devrait être strictement supérieure à $1+s$, ce qui est impossible. Donc la somme est infinie....
> https://membres-ljk.imag.fr/Bernard.Ycart/mel/sn/node18.html

Les mathématiciens de la Grèce antique ont relevé les difficultés liées à l'infini. L'élaboration de pratiques mathématiques incluant un concept d'infini sur lequel opérer a été lent et précautionneux. La preuve de Mengoli est finitiste contrairement à celle de Jakob Bernoulli (et donne un minorant de la vitesse de croissance de la série harmonique). La diffusion des connaissances, parfois appelée vulgarisation, est une activité qui n'est pas toujours conduite avec toute l'attention qu'elle mériterait.

Point de vue sous la responsabilité de l'auteur du quatre-pages.