Groupe AHMES
Auteur : Cédric ROUER

Enseigner l'algèbre du collège au lycée : une histoire d'inconnue méconnue

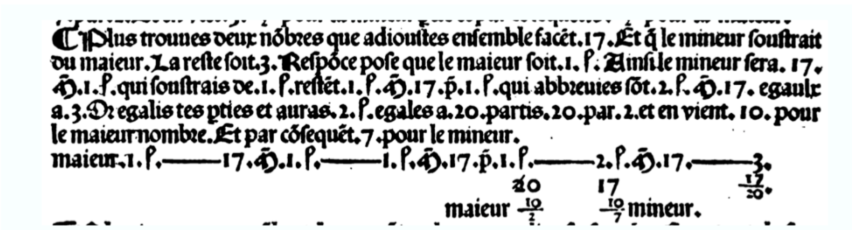
RÉSOLUTION D'ÉQUATIONS : UNE MÉTHODE ANCIENNE

Partie 1 : *un problème à résoudre*

On cherche deux nombres. Leur somme est 17, et leur différence est 3.
Peux-tu trouver ces deux nombres ?

Partie 2 : *une méthode ancienne*

Le problème précédent est présent dans le livre <u>*Arithmétique nouvellement composée*</u> d'Etienne De la Roche, écrit en 1538. Dans cet ouvrage, De la Roche expose une méthode de résolution algébrique (avec des « symboles »), inspirée de celle mise au point par les mathématiciens arabes du 9ème siècle. Voici l'extrait :


Plus trouues deux nõbres que adioustes ensemble facẽt.17.Et q̃ le mineur soustrait du maieur.La reste soit.3.Respõce pose que le maieur soit.1.ρ. Ainsi le mineur sera.17.m̃.1.ρ.qui soustrais de.1.ρ.restẽt.1.ρ.m̃.17.p̃.1.ρ.qui abbreuiez sõt.2.ρ.m̃.17.egaulx a.3.Or egalis tes pties et auras.2.ρ.egales a.20.partis.20.par.2.et en vient.10.pour le maieur nombre.Et par cõsequẽt.7.pour le mineur.

<u>*Traduction :*</u> « Trouve deux nombres qui ajoutés ensemble fassent 17 et que le plus petit soustrait du plus grand, le reste soit 3. Réponse : pose que le plus grand soit 1.P. Ainsi le plus petit sera 17.$\tilde{m}$.1.P qui soustrait de 1.P. laisse 1.P.$\tilde{m}$.17.$\tilde{p}$.1.P qui abrégés sont 2.P. $\tilde{m}$.17. égaux à 3. Égalise tes parties et tu auras 2.P. égales à 20. Partage 20 par 2 et il vient 10 pour le plus grand nombre. Et par conséquent 7 pour le plus petit. »

(1) Comment De la Roche décide-t-il d'écrire le plus grand nombre ?
(2) Que signifie le symbole $\tilde{m}$? Le symbole $\tilde{p}$?
(3) Comment s'écrit le plus petit nombre dans les notations de De la Roche ?
(4) Réécris la phrase « *17.$\tilde{m}$.1.P qui soustrait de 1.P. laisse 1.P.$\tilde{m}$.17.$\tilde{p}$.1.P* » avec nos notations actuelles.
(5) Écris l'équation de la ligne 5 avec nos notations.
(6) Que veut dire De la Roche quand il dit « *Égalise tes parties et tu auras 2.P. égales à 20* » ? Traduis avec les notations actuelles.
(7) Réécris la résolution complète de l'équation avec nos notations.
(8) Résous les équations suivantes avec la méthode de De la Roche :

$3x - 11 = 7$ $\qquad$ $4x + 9 = 12$ $\qquad$ $-5x + 6 = -4$

Fiche pédagogique
Titre : Résolution d'équation : une méthode ancienne

Description générale

Niveau de classe	4ème
Notions abordées	- Mise en équation d'un problème du premier degré - Résolution d'une équation du premier degré
Objectifs	- Pratiquer le calcul littéral - Comprendre et utiliser une méthode générique pour résoudre les équations du type ax + b = c
Intérêt historique ou épistémologique	- Expliquer l'origine du mot « algèbre » - Montrer le caractère algorithmique la résolution ancienne des équations - Distinguer le calcul algébrique et le calcul littéral : l'algèbre n'a pas toujours été symbolique. Faire de l'algèbre ne signifie pas forcément utiliser des lettres. L'algèbre arabe était d'abord rhétorique et l'est restée longtemps. Le symbolisme s'est imposé au fur et à mesure dans les pays d'Islam et en Europe.

Feuille de route

L'activité nécessite entre 1h est 1h30. Elle sert d'introduction à la résolution des équations du premier degré, avec comme pré-requis la maîtrise du calcul littéral, notamment la simple distributivité, ainsi que la notion d'équation.
La question 8 peut être faite à la maison par les élèves, une fois la méthode explicitée en classe.

Minutage approximatif	Déroulé	Matériel utilisé
5 min	**Partie 1** Résolution individuelle du problème.	
40 min	**Partie 2** Travail individuel. Lecture du texte et réponses au questions. Plusieurs points peuvent être faits au tableau pour guider les élèves, notamment pour déchiffrer les notations de De la Roche, et pour corriger les questions au fur et à mesure. Par exemple, une première correction peut être faite pour les questions 1 à 5, puis plus tard pour les questions 6 et 7. La question 8 peut être faite en partie ou entièrement à la maison.	
5 min	**Bilan historique et épistémologique** Peut être fait à la séance suivante, ou donné à lire à la maison.	Doc. Photocopié

Difficultés prévisibles des élèves

Partie 1 :

Aucune difficulté majeure ici. La simplicité du problème permet d'éliminer des difficultés et des obstacles à la compréhension de la partie 2.

Partie 2 :

- Questions 1, 2 et 3 : difficultés pour s'approprier les notations de De la Roche, notamment les symboles $\tilde{m}$ et $\tilde{p}$. Un petit point oral sur l'histoire des notations peut-être fait ici, rappelant notamment que des symboles aussi « simples » que +, − ou = n'ont pas toujours existé.

- Question 4 : difficulté pour passer d'une expression à l'autre, mauvaise maitrise de la distributivité. Un rappel peut être fait en amont pour préparer cette question.

- Question 6 : difficulté pour comprendre d'où vient le 20, pour voir que l'on ajoute 17 aux deux membres.

- Question 7 : difficulté pour reprendre tout le déroulé, de l'équation à sa résolution finale. On peut préciser aux élèves que cette technique a été théorisée par al-Khwārizmi 700 ans avant environ, qu'il l'appelait « restauration » (al-jabr) et « comparaison », ce qui a donné son nom à la discipline. Al-Khwārizmi, en revanche, n'utilisait aucun symbole, juste des termes génériques (nombre, chose, mal…), pour désigner l'inconnue, son carré… etc.

Exemple de bilan historique et épistémologique

Cette activité a permis de rencontrer un des nombreux algébristes français du XVIème siècle : Etienne de la Roche. L'algèbre est la branche des mathématiques qui permet d'exprimer les propriétés des opérations et le traitement des équations, et qui aboutit à l'étude des structures algébriques. Les prémices de l'algèbre datent de l'Antiquité avec les Babyloniens, les Grecs et les Egyptiens, mais sa vraie naissance vient avec les mathématiciens arabes du Moyen-Âge.

En effet, comment ne pas citer le savant Muhammad ibn Musa al-Khwārizmi (790-850) et son ouvrage le « *Kitâb al-jabr wa al-muqâbala* » (Abrégé du calcul par la restauration et la comparaison), écrit entre 813 et 833. C'est lui qui donnera son nom à l'algèbre (al-jabr), et qui pose les bases des méthodes algébriques de résolution des équations. Cela dit, l'algèbre écrit par al-Khwārizmi reste rhétorique sans aucun symbole, même pour les nombres. Il appelle « dirham » (monnaie de l'époque) un nombre simple, « chay » (chose) l'inconnue, et « mal » le carré de l'inconnue. Les symboles feront leur apparition petit à petit avec d'autres mathématiciens arabes, un peu après al-Khwārizmi, dont ils gardent et diffusent les méthodes de résolution.

Les travaux des arabes s'étendent ensuite jusqu'à l'Europe et sont poursuivis par les mathématiciens Italiens, comme Fibonacci (1170-1250), Bombelli (1526-1572) ou Tartaglia (1499-1557). Le mathématicien Français Nicolas Chuquet (1445-1500 environ) développe le symbolisme, et dans son ouvrage « *Triparty en la science des nombres* », les mots laissent largement leur place à des symboles. François Viète (1540-1603), Simon Stévin (1548-1620) et René Descartes (1596-1650) poursuivent la mise en place de notations, proches de celles que nous utilisons aujourd'hui.

Mathématicien	Époque	Notation
Al-Khwārizmi	IXème s.	Quatre carrés et trois racines sont égaux à dix dirhams
Chuquet	XVème s.	4^2 p 3^1 egault 10^0
Tartaglia	XVIème s.	4q p 3R equale 10N
Stévin	XVIème s.	4② + 3① egales 10⓪
Viète	Vers 1600	4 in A quad + 3 in A æquatur 10
Descartes	Vers 1640	$4xx + 3x \qquad 10$
Vous	2025	$4x^2 + 3x = 10$

Al-Khwārizmi

Nicolas Chuquet