

Approche des fondements épistémologiques de la géométrie du cycle 3

Alex ESBELIN, Anne-Cécile MATHÉ, Aurélie ROUX

Introduction

Une théorie épistémologique due à Thomas Kuhn (Kuhn 1962) décrit les sciences comme des pratiques sociales normées. L'auteur appelle l'ensemble des normes à un instant donné un « paradigme ». Dans cette théorie, une science évolue dans un paradigme stable qu'elle adapte pour prendre en compte des phénomènes nouveaux, jusqu'à rencontrer des phénomènes qui ne lui sont pas réductibles appelés « anomalies ». La nécessité d'expliquer ces anomalies conduit à des changements de paradigmes. Un paradigme suppose une cohérence (concernant la nature des problèmes, des objets, des pratiques).

Une étude de l'histoire des sciences du réel permet de se convaincre de l'intérêt de cette théorie. Sa pertinence pour la description des mathématiques est moins immédiate. Dans (Houdement et Kuzniak 2006), Catherine Houdement et Alain Kuzniak, cherchant à mettre au jour des difficultés, des malentendus et des enjeux d'enseignement et d'apprentissage, notamment à la transition entre l'école et le collège, définissent trois paradigmes pour la géométrie :

★ La « Géométrie naturelle » (GI) s'emploie à résoudre des problèmes portant sur des objets matériels, traces graphiques sur le papier, traces virtuelles sur l'écran d'ordinateur ou encore maquettes d'objets de l'environnement. Cette Géométrie I exerce un effort d'abstraction en sélectionnant certains aspects de ces objets matériels et en les traduisant parfois par des schémas comme les figures simples (cercles, carrés...). Ses techniques licites sont empiriques et s'appuient sur l'utilisation des instruments. Le corpus de savoirs de cette géométrie est constitué d'affirmations étayées par l'intuition et le raisonnement à partir de la perception ou de l'expérience (instrumentée). La Géométrie I a pour source de validation la réalité sensible.

★ La « Géométrie axiomatique naturelle » (GII) prend pour objets d'étude des objets idéels. Se posent alors la question de la définition de ces objets et celle de la nécessité d'axiomes, comme chez Euclide. « Les axiomes proposés dans la Géométrie euclidienne, prototype de la Géométrie II, sont fortement appuyés sur les objets de la Géométrie I conservant ainsi un lien fort avec l'espace sensible, d'où le qualificatif d'Axiomatique Naturelle. » (Houdement, 2007, p.74). Le mode de production des connaissances est le raisonnement hypothético-déductif. Sa source de validation est ainsi un système hypothético-déductif où la syntaxe est associée à une sémantique fondée sur la réalité et l'axiomatisation sur l'observation de cette réalité.

★ Dans la « Géométrie axiomatique formaliste » (GIII), la syntaxe et les axiomes ne sont plus fondés sur le sensible et la correction du raisonnement logique l'emporte sur la vérité.

Cette construction est un grand pas pour l'analyse des faits pédagogiques relevant de l'enseignement de la géométrie. Elle apporte, en fixant des limites, une cohérence à l'étude historique, à l'analyse épistémologique et à la réflexion pédagogique. Mais l'adaptation aux mathématiques de la théorie de Kuhn n'a pas été encore conduite, tout au plus trouve-t-on parfois utilisés des mots qui font écho (crise des irrationnels, crise des fondements, ...). De plus, si il est bien reconnu que les pratiques géométriques évoluent au cours de la scolarité, cette évolution n'est pas très bien décrite par les théories, donc ne peut qu'être difficilement construite par les enseignants. Elle met aussi en évidence les difficultés dues à la cohabitation de paradigmes différents au même moment de la scolarité. GI et GII ne forment pas une échelle complète. Dans (Tanguay et Geeraets 2012), Denis Tanguay et Loïc Geeraets proposent un « paradigme » du physicien-géomètre : la pratique géométrique est expérimentale, le mesurage a, comme dans les sciences de la nature, une fonction d'exploration et une fonction de vérification.

Notre projet est de confronter ces conceptions à quelques pratiques historiques. Dans les sections suivantes, nous en présentons deux :

★ la géométrie védique est connue par quelques textes concordants. Avec elle, on abordera la question de la description d'un paradigme. En particulier, on verra que, dans un ensemble de pratiques homogènes, certaines connaissances peuvent rompre cette homogénéité.

★ La géométrie grecque archaïque est connue par des textes lacunaires et des commentaires tardifs. À son sujet, on abordera la question de la construction d'un paradigme, ainsi que celle de la transition d'un paradigme à un autre.

Géométrie védique

Une pratique stable

L'antiquité indienne a livré des textes religieux dont certaines parties réfèrent à des pratiques que nous qualifions de mathématiques. Les débuts des quatre Śulvasūtras disponibles, datés du sixième siècle avant notre ère (à deux siècles près), font référence au problème suivant : *construire des autels au cordeau et aux*

piquets suivant des spécifications d'aire. Ces textes sont constitués de versets que le Śulbavid, le savant aux cordeaux, savait par cœur. Comme les autres textes sacrés, ils ont fait l'objet d'une élaboration et d'une transmission orale multiséculaire avant que la concurrence d'autres religions ne pousse à leur rédaction pour faciliter le prosélytisme. Un exemple, le verset 58 du livre I des Śulvasūtras de Baudhāyana, se trouve dans la figure 1.a en sanscrit et translittéré en figure 1.b.

| | |
|---|--|
| चतुरस्रं मण्डलं चिकीर्षन्नक्षयार्धं | <i>caturaśraṃ maṇḍalaṃ cikīrṣannakṣayārdhaṃ</i> |
| मध्यात्प्राचीमभ्यापातयेद्यदतिश्रियते तस्य च | <i>madhyātpṛācīm- abhyāpātayet</i> |
| दृतीयेन मण्डलं परिलिखेत् । | <i>yadatiśīṣyate tasya saha tṛtīyena maṇḍalaṃ parilikhet</i> |

Figure 1.a d'après (Thibaut, 1875)

Figure 1.b d'après (Sun & Bag, 1983)

FIGURE 1 – Verset 58 du livre I des Śulvasūtras de Baudhāyana

La finalité exclusive de construction d'autels est affirmée dès le début, par exemple dans les versets 1 et 2 du premier livre de Baudhāyana (abrégé BŚI)¹.

BŚI 1-1. : « Maintenant, voici les constructions des foyers sacrificiels. »

BŚI 1-2. : « Nous expliquerons les dimensions et la confection de la surface de ceux-ci. »

Les Śulbavids utilisent des piquets et des cordes sur lesquelles des marques sont indiquées². Nous nous concentrons dans ce texte sur quelques problèmes parmi d'autres. L'une des deux constructions utilisées d'un autel carré de côté donné est ainsi décrite dans les Śulbasūtras de Baudhāyana au verset 4 du livre I :

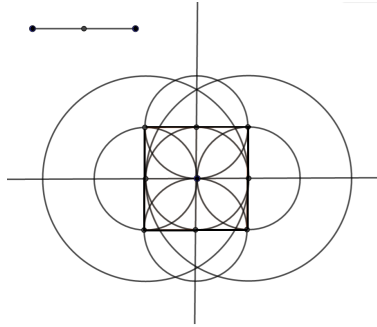


FIGURE 2 – Construction de l'autel carré d'après le verset 4 du livre I des Śulbasūtras de Baudhāyana

BŚI 1-4. : « Si l'on désire construire un carré, après avoir muni de nœuds aux deux bouts d'une corde aussi grande que ce [carré] que l'on voudrait construire, on fait une marque au milieu [de la corde]. Après avoir tracé une ligne [d'ouest en est],

1. Toutes les traductions des Śulvasūtras de Baudhāyana sont issues de (Delire 2016).

2. Lorsque les longueurs en jeu sont plus grandes que la taille humaine, ces cordes peuvent être remplacées par des tiges de bambou.

que l'on enfonce un piquet au milieu de celle-ci. Après avoir fixé les deux boucles [de la corde] à cet endroit, que l'on trace en rond un cercle. Que l'on enfonce deux piquets aux deux extrémités [ouest et est] du diamètre.

Après avoir fixé une boucle [au piquet de l'est], que l'on trace un cercle à l'aide de l'[autre] boucle.

De même à l'ouest. Que l'on étende au deuxième diamètre par ces [deux points] où ces deux [cercles] se rencontrent.

Que l'on enfonce deux piquets aux deux extrémités du diamètre.

Après avoir fixé les deux boucles au [piquet] de l'est, que l'on trace un cercle à l'aide de la marque.

[Après avoir fixé les deux boucles] également au piquet sud, ouest, nord, [que l'on trace trois autres cercles], le carré s'inscrit [entre les points] qui sont les rencontres extrêmes de ces [quatre cercles]. »

La méthode suivante construit un disque de même aire qu'un carré donné.

BŚI I-58. : « Si l'on désire transformer un carré en cercle, que l'on fasse tomber la moitié de la diagonale [du carré, prise] à partir du centre sur la *prācī*³. Que l'on trace un cercle avec le tiers de ce qui reste [en dehors du carré] ensemble [avec le demi côté du carré]. »

Une expression algébrique de la formule donnant le rayon du cercle serait aujourd'hui

$r \approx \frac{\frac{d}{2} - \frac{c}{2}}{3} + \frac{c}{2}$, où c désigne la longueur du côté du carré, d celle de la diagonale et r le rayon du cercle. La méthode de découverte suivante est suggérée par la fin du verset 2 du livre 3 des Śulbasūtras d'Āpastamba :

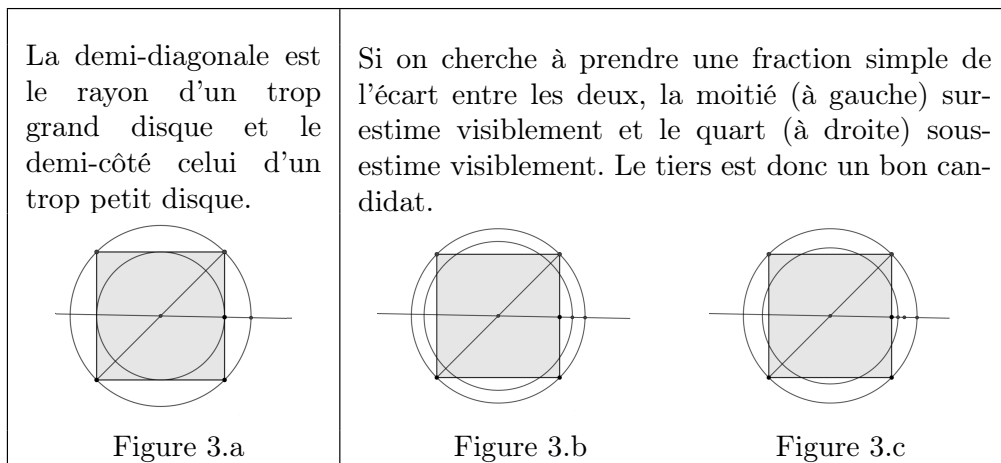


FIGURE 3 – Comparaison de la longueur du côté du carré et celle du diamètre du disque de même aire par « essais-erreur »

Pour résoudre le problème *tracer un angle droit à la corde et aux piquets*, **BŚI I-5.** propose de faire des nœuds sur une corde de longueur deux unités comme

3. La ligne ouest-est.

le dessin ci-dessous le montre, puis de tendre la corde. On utilise donc le triplet pythagoricien $\left(1; \frac{3}{4}; \frac{5}{4}\right)$.

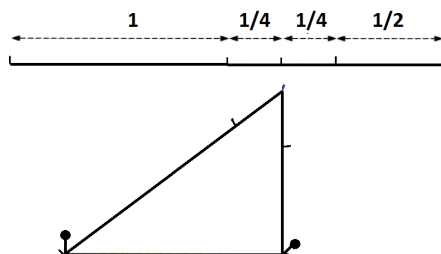


FIGURE 4 – Tracé de l'angle droit au cordeau

Le problème de la construction d'un carré d'aire égale à la somme des aires de deux carrés donnés est bien sûr résolu en utilisant la propriété suivante des diagonales des rectangles :

BŚI I-50. : « Si l'on rassemble deux carrés [de tailles] différentes, que l'on trace à l'aide du côté le plus petit une bande du plus grand, la corde diagonale de cette bande est le côté [du carré constitué des deux carrés] rassemblés. »

Une méthode de soustraction des carrés est aussi présentée. Elle correspond à la construction suivante :

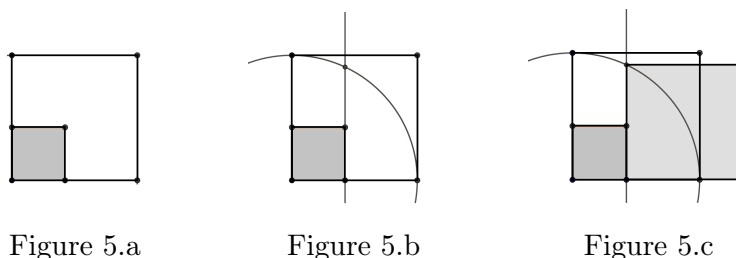


FIGURE 5 – Soustraction des aires dans l'ensemble des carrés

Comment qualifier une telle pratique ?

La justification de la construction du disque d'aire égale à celle d'un carré n'est pas hypothético-déductive. Il est peu probable qu'elle soit de nature expérimentale (fondée sur des mesures comme celle de la production de champs de céréales de formes différentes, de la contenance de récipients de bases différentes, ...). Elle est probablement fondée sur une perception visuelle, qui n'exclut pas toute forme de raisonnement. La justification de la propriété de la diagonale du triangle rectangle est plus difficile à deviner. Un texte plus tardif de Bhāskara fait référence à une figure traditionnellement représentée comme ci-dessous :

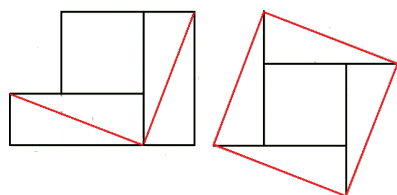


Figure 6.a

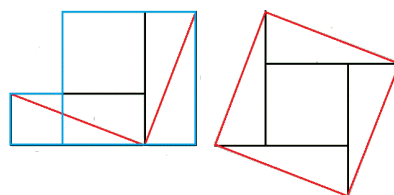


Figure 6.b

FIGURE 6 – Une « preuve dessinée » de la propriété de « Pythagore »

Remarquez comme l'observation de la figure 6a laisse perplexe, et celle de la figure 6.b crée une impression visuelle durable. Quelques triplets pythagoriciens sont proposés, à partir de 3 et 4, 12 et 5, 15 et 8, etc... On peut envisager que le problème de l'addition de deux carrés sous forme d'un carré ait pu être celui qui conduit à la mise en évidence de la propriété de la diagonale utilisée comme outil de résolution. La démarche de découverte peut être empirique : on essaie par pavage par des carrés unité dans des cas simples et après avoir essayé des couples de type (1,3), (2,3), ..., on arrive assez vite à (3,4) pour lequel un pavage montre que « ça marche ». Mais pour une pratique sacrée peut-on se contenter d'une vérification sur quelques cas ?

Les problèmes des Śulbavids sont des constructions de surface de formes et d'aires données ; la construction à la corde marquée et aux piquets revient à notre construction à la règle graduée et au compas. Les constructions sont réalisées suivant des protocoles non explicitement justifiés mais qui articulent des certitudes géométriques appuyées sur le visible. L'élaboration de ces procédés nécessite des raisonnements qui n'ont pas été conservés. Assez clairement, il ne s'agit pas du paradigme du mathématicien physicien, car il n'y a pas collections de mesures. Il ne s'agit pas du paradigme GII car aucune trace de raisonnement textuel n'est présente, et le but n'est pas l'élaboration de vérités, mais la construction de plans d'autels. Il ne s'agit pas non plus d'un paradigme de géométrie empirique dans le sens où les vérités seraient issues d'essais-erreurs et validées perceptivement. Une affirmation est assurée : les Śulbavids ne connaissent pas le théorème de Pythagore. Le mot *théorème* renvoie à une pratique démonstrative qui n'y est pas en jeu. On doit en revanche les créditer de la connaissance de la propriété de la diagonale des rectangles (notre propriété de l'hypoténuse des triangles rectangles) et de son utilisation dans la résolution de problèmes variés de construction de figures.

Un problème d'histoire des mathématiques

Voyons les versets 59 à 61 du livre I des Śulbasūtras de Baudhāyana à propos du problème : « étant donné un disque, construire un carré de même aire. ». Dans toute la suite de cette section, on note c la longueur du côté d'un carré, d celle de sa diagonale et r la rayon du disque de même aire.

On cherche donc c tel que $\pi r^2 = c^2$. En inversant l'expression proposée dans **BŚI I-58**, nous obtenons (avec nos méthodes de calcul) $c = r \times 3(2 - \sqrt{2})$, dont nous

pouvons donner la construction ci-contre. La possibilité d'un tel calcul n'apparaît nulle part dans les pratiques des Śulbasūtras.

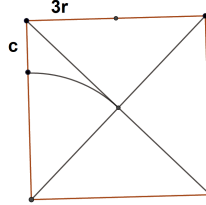


FIGURE 7 – Construction (non avérée dans les Śulbasūtras) du côté c d'un carré d'aire « proche » de celle d'un disque de rayon r donné

On y trouve en revanche deux constructions. Celle donnée par **BŚI I-59** revient à la formule $c \approx (2r) - \frac{1}{8 \times 29} \left(28 + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} \times \frac{1}{6} \right) (2r)$. L'autre donnée par **BŚI I-60** revient à $c \approx (2r) - \frac{2}{15} (2r)$. Ces deux constructions précèdent immédiatement celle de la diagonale d'un carré donnée dans **BŚI I-61** traduite par la formule algébrique $d \approx \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} - \frac{1}{34} \times \left(\frac{1}{4} \times \frac{1}{3} \right) \right) c$. Ce coefficient correspond à notre fraction $577/408 \approx 1,414215$. Cet ensemble de versets introduit une hétérogénéité : d'abord, la diagonale d'un carré peut-être obtenue directement sur le carré ; ensuite la précision des derniers termes des approximations dans **BŚI I-59**. et **BŚI I-61** dépasse le perceptible ; enfin aucune méthode pratique de pliage de corde ne saurait produire de telles fractions.

Avec l'approximation $d \approx \left(1 + \frac{1}{2} \right) c$, des calculs élémentaires donneraient $c \approx \left(1 - \frac{1}{7} \right) (2r)$. L'approximation donnée par **BŚI I-60**. s'obtient à partir de $d \approx \left(1 + \frac{2}{5} \right) c$ qui n'apparaît pas à notre connaissance dans les Śulbasūtras. L'approximation $d \approx \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3 \times 4} \right) c$ donnée dans les Śulbasūtras de Mānava au verset 1 du livre 12 sous la forme $d \approx \left(1 + \frac{1}{6} - \frac{1}{2 \times 6} \right) c$ conduit à inverser une fraction que nous pouvons écrire $41/36$. Depuis plus d'un siècle, les historiens cherchent à inclure cette quadrature du disque en imaginant une procédure relevant de l'ensemble des pratiques védiques : une référence récente (Kichenassamy, 2006) dresse un inventaire et fait une proposition qui ne nous semble pas totalement convaincante. L'alternative de l'appel à une origine externe qui, sans aller jusqu'à faire intervenir des extra-terrestres, envisage une tradition mathématique autre, échoue actuellement par l'absence de traces d'une telle théorie, qui n'aurait pas bénéficié de la portée religieuse des mathématiques védiques.

Géométrie milésienne

Mathématiques dans la société savante de la Grèce archaïque

À partir du III^e siècle avant J.C., les pratiques des mathématiciens grecs sont régies par les *Éléments* d'Euclide. Le refus de l'évidence intuitive, déjà présent chez Platon, prédomine. Une genèse mal connue y a conduit, sur laquelle les sources sont trop rares pour ne pas laisser place à l'interprétation. Toutes attribuent une activité intellectuelle particulière aux cités de la côte ionnienne au VI^e siècle avant J.C. : les Grecs de cette époque de colonisation⁴ n'ont pu méconnaître les civilisations mésopotamiennes et égyptiennes ; la ville de Milet, des plus dynamiques, a vu naître Thalès, modèle de la figure du Sage mathématicien construite au cours des dix siècles suivants, comme sera construite la figure du sage politicien à partir de l'athénien Solon. Il est très crédible qu'une classe sociale de propriétaires terriens, aristocrates ou non, de marchands, de gros artisans participant à la gestion de la cité se réunissent dans des symposii et débattent. Tous s'intéressent probablement aux affaires et à la politique, certains aussi à l'astronomie ou à la métaphysique, cherchant par exemple les principes premiers explicatifs du cosmos ou même de l'univers (l'eau pour Thalès, l'apeiron pour Anaximandre, ...), d'autres racontent simplement leurs voyages.

Thalès est crédité par des auteurs antiques (Proclus, Diogène Laërce, ...) d'une mesure de la hauteur des pyramides à partir de celle de leurs ombres, mais aussi des résultats suivants :

- ★ un cercle est partagé en deux parties égales par tout diamètre ;
- ★ les angles à la base d'un triangle isocèle sont égaux ;
- ★ lorsque deux droites se coupent, les angles opposés par le sommet sont égaux ;
- ★ deux triangles sont égaux s'ils ont deux angles et un côté égaux.

Dans quel ensemble de pratiques mathématiques des affirmations comme celles-ci ont une telle importance qu'elles sont citées de nombreux siècles après (un millénaire environ pour Proclus) ? Elles ne peuvent être que très différentes de celles de l'époque d'Euclide et même d'Aristote. Elles pourraient relever aussi bien de l'intuition que de la démonstration logique. L'objet de cette section est de proposer un paradigme hypothétique les décrivant.

Jusqu'au XIX^e siècle, les historiens des sciences considèrent qu'une étape empirique est indispensable avant toute forme d'abstraction. Ayant peu d'informations sur les mathématiques des antiquités mésopotamiennes et égyptiennes, ils assignent cette étape aux mathématiques grecques de la période archaïque. Au XX^e siècle, c'est à celles-ci que Van der Waerden attribue un statut empirique. Il suggère aussi qu'à la recherche de méthodes de calcul, Thalès aurait ajouté celle de preuves de leur correction et constitué un corpus logiquement articulé de théorèmes. Tannery organise les connaissances attribuées à Thalès autour d'un problème pratique de distances inaccessibles⁵ ou de problèmes plus généraux comme l'inscription d'un triangle rectangle dans un demi-cercle.

L'attribution de la propriété de Thalès à Thalès a fait l'objet de nombreuses

4. Au sens de la Grèce archaïque du terme, bien sûr !

5. La distance du bateau à la côte.

analyses critiques. Si, comme le rapporte Pline, la mesure de la hauteur de la pyramide, qui est le plus connu des apports de Thalès aux mathématiques, a été faite quand la hauteur du bâton était égale à la longueur de son ombre, il n'est pas question de rapport de longueurs, mais de propriétés des triangles rectangles isocèles.

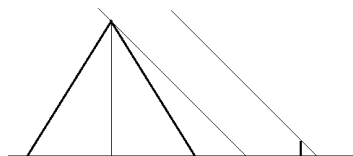


FIGURE 8 – Thalès et l'ombre de la pyramide

Le problème 56 du papyrus Rhind demande, à propos d'une pyramide [à base carrée] de côté 360 coudées et de hauteur 250 coudées, de calculer le déplacement horizontal mesuré en palmes (une coudée égale sept palmes) correspondant à une hauteur verticale de une coudée [sur l'axe de symétrie d'une face]. Le « corrigé » propose la méthode suivante : trouve le nombre qui multiplié par 250 donne la moitié de 360 et multiplie-le par 7. Les trois problèmes qui suivent dans le même document reprennent la situation avec de nouvelles valeurs numériques.

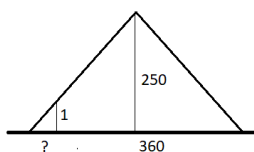


FIGURE 9 – La pente en Égypte pharaonique

Cet exemple montre la résolution d'un problème de quatrième proportionnelle avant le XV^e siècle avant J.C. La première conclusion est donc que les mathématiciens ioniens n'ont pas ajouté de connaissances aux mathématiques égyptiennes sur la proportionnalité des longueurs correspondantes dans les figures semblables. La seconde que ces mathématiciens ioniens ont pu apporter une technique de mesure originale, fondée sur la connaissance des triangles et économique en calcul, au prix de l'attente d'un instant favorable à sa mise en œuvre. Ils ont pu peut-être aussi apporter l'idée d'utiliser l'ombre, un outil courant de leurs pratiques astronomiques que nous allons évoquer dans la section suivante.

À la recherche d'une cohérence

Dans cette section, nous proposons une description hypothétique du paradigme des mathématiques grecques archaïques en cohérence avec les faits rendus disponibles par les historiens.

• On retiendra d’abord qu’il s’agit de pratiques de cette élite intellectuelle mentionnée plus haut. Ses membres sont des physiologues⁶ qui ne sont pas exactement les savants, dans le sens de ce mot qui fait écrire par les éditeurs de (Bisson et al., 2012) dans leur avant-propos « ... en Grèce archaïque, les charpentiers sont des savants ». Ces pratiques sont associées à des problèmes d’astronomie liés à la navigation et à une interrogation sur le cosmos. Ces deux sources de questions conduisent à l’étude de la voûte céleste, dont l’existence ne fait pas l’objet d’un questionnement pour sa partie visible (mais dont la conception va évoluer dès cette période). Les activités des agrimensurs ont certainement eu une importance, mais n’ont pas laissé de traces, sans doute à cause de la structure sociale, très différente de celle des empires de l’Antiquité.

L’outil fondamental de l’astronomie est l’ombre du gnomon. Les problèmes astronomiques se traitent debout à côté de celui-ci. L’ombre dessine une figuration de la voûte céleste. Si le gnomon s’insère dans un hémisphère⁷, cette ombre en crée une image semblable. Des observations élémentaires donnent alors accès aux notions de l’astronomie : les solstices correspondent aux inclinaisons extrêmes du soleil, les tropiques sont les lignes de la voûte céleste entre lesquelles la course du soleil est assujettie à rester... Le **principe premier** de ces observations est **l’égalité des angles opposés par le sommet** : c’est lui qui rend l’image de la voûte céleste conforme à celle-ci.

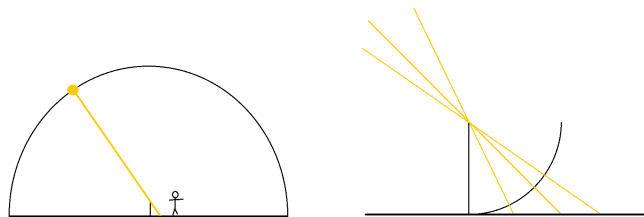


FIGURE 10 – Reproduction de la voûte céleste dans le *scaphe*

Les relations entre les propriétés des figures peuvent être analysées suivant une pensée intuitive. Une telle pensée est un outil de découverte que vient après coup confirmer une activité rationnelle. Considérez par exemple le problème suivant : *étant donné un triangle rectangle, l’inscrire dans un cercle.*

Si vous pensez le triangle rectangle comme un demi rectangle, vous n’aurez pas de difficulté à réaliser cette tâche qui laisse en revanche perplexes ceux qui le pensent comme un triangle ayant un angle droit⁸.

6. Ceux qui utilisent la raison (logos) pour étudier ce qui est (physis).

7. On ne connaît pas d’exemple de tel outil appelé ultérieurement *scaphe* dans la période archaïque grecque. Des historiens des sciences créditent les babyloniens de son invention.

8. Pas les professeurs de mathématiques, bien sûr !



FIGURE 11 – Deux visions du triangle rectangle

Ce concept de « pensée intuitive » est utilisé par Maurice Caveing. Il l'illustre dans le problème de la recherche du principe qui fonde la similitude des formes : le point de départ serait la perception de la similitude des polygones réguliers. Un triangle équilatéral ne serait donc pas un triangle à côtés isométriques, mais un polygone régulier à trois côtés. Des polygones réguliers ayant même nombre de côtés sont semblables comme les cercles le sont entre eux. Deux principes premiers de similitude peuvent être envisagés : l'égalité des angles correspondants ou la proportionnalité des longueurs de côtés correspondants. Les milésiens auraient choisi le premier, les pythagoriciens le second. On peut donc attribuer aux mathématiciens milésiens la création du concept d'angle et des propriétés (élémentaires) qui le définissent. Cette attribution est confortée par sa place centrale dans les deux problèmes évoqués plus haut.

- Les trois affirmations suivantes ne sont pas indépendantes (intuitivement).

(1) un cercle est partagé en deux parties égales par tout diamètre, dans le sens : les cordes sont bissectées par les diamètres qui leur sont perpendiculaires, ou aussi bien les diamètres sont des axes de symétrie⁹ ;

(2) les angles à la base d'un triangle isocèle sont égaux ;

(3) deux triangles sont égaux s'ils ont deux angles et un côté égaux.

La figure ci-dessous illustre l'articulation de ces propositions. Il est équivalent de dire :

★ les triangles OIA et OIB sont isométriques (ou égaux, dans le sens où ils ont des côtés deux à deux de même longueur).

★ $IA = IB$.

★ Les angles à la base du triangle isocèle sont égaux.

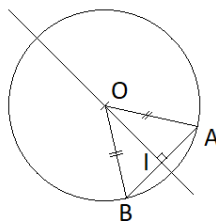


FIGURE 12 – Voir les propriétés des triangles isocèles

9. L'autre interprétation possible « un cercle est partagé en deux parties d'aires égales par tout diamètre » apporte de l'incohérence.

Dans notre paradigme, il est possible de démontrer que (1) et (3) impliquent (2) et que (2) et (3) impliquent (1). Ces démonstrations ne sont pas éloignées de l'intuition. Avant la production d'un corpus structuré comme celui des *Éléments*, autant ou plus encore qu'une étape *empirique*, est nécessaire une réflexion sur l'articulation logique entre les propriétés (plus généralement entre les affirmations) devant déboucher sur un choix de principes premiers, nos axiomes. Nous pensons que les mathématiciens ioniens peuvent en être crédités.

Les physiologues milésiens recherchent ainsi des articulations logiques entre les certitudes géométriques appuyées sur le visible. Ils travaillent sur des figures et utilisent un raisonnement textuel avec un objectif que nous pourrions formuler comme la recherche d'axiomes. Ce paradigme n'est pas le paradigme GII qui suppose déjà construit le cadre axiomatique, il n'est pas non plus le paradigme GI par la nature de ses problèmes et objets. Bien sûr, il n'est pas exclu qu'un ensemble de pratiques que nous associons à la géométrie ait pu vivre dans le milieu des arpenteurs, mais de manière totalement indépendante de celui que nous avons décrit.

Pourquoi changer les pratiques ?

Les mathématiques grecques antiques évoquent généralement Euclide, Archimède ou Ptolémée. Elles se distinguent des mathématiques milésiennes par de nombreux aspects que nous ne pouvons bien sûr pas détailler. L'un d'entre eux concerne la pratique des preuves. Les démonstrations directes déduisent la conclusion de propositions considérées vraies qui peuvent être issues d'observations ou d'expérimentations. Au contraire, les preuves par réduction à l'absurde, comme la preuve de la proposition 2 du livre III des *Éléments*, portent sur des objets qui ne relèvent pas de la réalité. Nous donnons ci-dessous une adaptation du texte en langage moderne pour le rendre plus compréhensible en conservant le fil du raisonnement.

« **Théorème.** Le segment qui joint deux points quelconques d'un cercle est contenu dans le disque.

Soit le cercle ABC ; qu'on prenne deux points quelconques A, B, sur ce cercle ...

Si la corde [AB] n'est pas contenue dans le disque, supposons, s'il est possible, qu'elle passe par un point extérieur E ; soit D soit le centre du cercle ; menez les rayons [AD], [DB], et prolongez [DF] jusqu'en E.

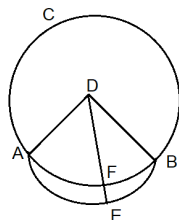


FIGURE 13 – Une corde qui ne serait pas à l'intérieur du disque !

Puisque DA est égal à DB, l'angle \widehat{DAE} sera égal à l'angle \widehat{DBE} ¹⁰.
 Et puisque l'on a prolongé un côté AEB du triangle DAE, l'angle \widehat{DEB} sera plus grand que l'angle \widehat{DAE} ¹¹.
 Mais l'angle \widehat{DAE} est égal à l'angle \widehat{DBE} : donc l'angle \widehat{DEB} est plus grand que l'angle \widehat{DBE} ¹² ; mais le plus grand côté est opposé à un plus grand angle : donc la droite DB est plus grande que la droite DE ; »

La fin du passage contient la partie rhétorique du raisonnement par l'absurde :

« ... mais DF est égal à DB : donc DF est plus grand que DE ; c'est-à-dire que la plus petite surpasse la plus grande, ce qui est impossible : donc le segment [AB] ne passe pas hors du cercle.

Nous démontrerons de la même manière qu'elle ne tombe pas dans la circonférence : donc elle tombe en-dedans du cercle. Donc si l'on prend deux points quelconques de la circonférence, le segment qui joint ces deux points tombe en-dedans du cercle ; ce qu'il fallait démontrer. »

Il est difficile de suivre les arguments de la preuve d'Euclide, puisque la représentation de la corde extérieure au cercle ne montre plus les propriétés. Durant le raisonnement, on utilise un concept formel de corde passant à l'extérieur d'un disque qui satisfait les propriétés d'une « droite »¹³ sans en avoir la réalité. La présence d'une telle preuve est d'autant plus étonnante que la même démarche permet d'organiser une preuve sans la réduction à l'absurde : sans faire l'hypothèse que la corde passe par un point extérieur au cercle, on considère ici simplement E sur la corde et on utilise le même fil de raisonnement :

... menez les rayons [AD], [DB], et prolongez [DF] jusqu'en E. Puisque DA est égale à DB, l'angle \widehat{DAE} sera égal à l'angle \widehat{DBE} . Et puisque l'on a prolongé un côté AEB du triangle DAE, l'angle \widehat{DEB} sera plus grand que l'angle \widehat{DAE} . Mais l'angle \widehat{DAE} est égal à l'angle \widehat{DBE} : donc l'angle \widehat{DEB} est plus grand que l'angle \widehat{DBE} ; mais le plus grand côté est opposé à un plus grand angle : donc la droite DB est plus grande que la droite DE.

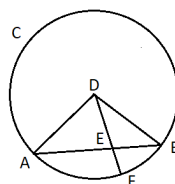


FIGURE 14 – Une corde qui est bien à l'intérieur du disque

10. Par égalité des angles à la base d'un triangle isocèle (prop. 5. I).

11. Ayant prolongé un côté d'un triangle quelconque, l'angle extérieur est plus grand que chacun des angles intérieurs et opposés (prop. 16. I).

12. Dans tout triangle, un plus grand côté est opposé à un plus grand angle (prop. 18. I).

13. La notion de droite dans les *Éléments* n'est pas exactement la même que la nôtre : il s'agit d'une famille de segments prolongeables sans limite. Nous conservons cet usage traditionnel pour traduire le mot $\gamma\rho\alpha\mu\mu\alpha$.

Ainsi ce n'est pas l'étude de l'espace qui a transformé la pratique de la géométrie de l'Antiquité et la nature de ses objets, mais l'apparition d'une nouvelle méthode de preuve, celle de la réduction à l'absurde. Mais il reste à s'interroger sur la nécessité de son apparition : comme dans le théorème ci-dessus, elle peut souvent être remplacée par une preuve directe.

Conclusion

Quelles pistes de réflexion didactique dégager de ces déambulations en géométrie antique ? Notre souci premier était d'interroger les possibles fondements épistémologiques des géométries enseignées. Or la géométrie védique peut sembler présenter quelques similitudes avec la géométrie de l'école, telle que la géométrie I de Houdement et Kuzniak ou la géométrie des tracés de Marie-Jeanne Perrin. Les problèmes posés portent sur des figures matérielles, les techniques licites sont instrumentales et la validation largement empirique. Bien évidemment, les finalités de la géométrie védique et de la géométrie enseignée sont bien différentes. Il s'agit pour l'une d'ériger un corpus de techniques et de savoirs permettant la communication de protocoles de construction d'autels à la corde et aux piquets, pour l'autre d'accompagner les élèves dans un premier niveau de conceptualisation des objets de la géométrie. Toutefois, ce détour par les pratiques et textes hérités des Śulbavids n'est pas sans intérêt pour interroger les enjeux et potentialités didactiques de la géométrie de l'école. En premier lieu, il permet de mettre au jour la richesse des connaissances et savoirs géométriques qu'il est possible de tisser à partir de la résolution de problèmes de construction (ou de reproduction) instrumentée de figures matérielles. Le travail autour des instruments à l'école ne vise pas la production de tracés précis mais de tracés justes (Petitfour, 2015), régis par un usage géométrique des instruments qui réfère implicitement à des axiomes, définitions et théorèmes de la géométrie. Étudier les pratiques védiques amène également à prendre conscience de la possibilité de faire de la géométrie des tracés un lieu possible de raisonnement. Si la validation reste empirique, la justification d'un tracé ou la question de la validité d'une construction engagent dans des démarches de preuves intellectuelles. Quelles informations nécessaires et suffisantes doit-on par exemple communiquer à un tiers pour lui faire construire un rectangle (sans nommer la figure) ? Pourquoi la donnée de la longueur de 3 côtés consécutifs et de deux angles droits suffit ? Dans ce cas, pourquoi le troisième côté est nécessairement de même longueur que le côté qui lui est opposé ? Comment justifier que les deux autres angles sont obligatoirement droits ? D'autres programmes de construction sont possibles, pourquoi sont-ils équivalents ? Cette réflexion livre alors des pistes pour penser de possibles continuités entre géométries physique et théorique, bien que les objets d'étude soient de natures bien différentes.

La notion de paradigme, importée des théories de Kuhn, peut enrichir la réflexion des enseignants de mathématiques et des historiens, en attirant l'attention sur la nécessité de penser des pratiques relevant d'une cohérence globale et d'une forme de clôture à un instant donné. Il n'est pas sûr que l'on puisse faire l'hypothèse d'une telle cohérence du côté enseignement : la validité d'une pratique

mathématique scolaire est le plus souvent évaluée par les enseignants à l'aune de ce qu'ils considèrent comme des mathématiques savantes. Les tentatives pour en instituer qui auraient une cohérence indépendante des pratiques ultérieures (et souvent éventuelles) plus savantes sont rares¹⁴, timides et vouées à l'échec. De nombreuses recherches en didactique de la géométrie (Houdement et Kuzniak, Tanguay et Geeraets, Chesnais et al. et d'autres) ont mis en évidence les malentendus et difficultés ainsi générés par les confrontations entre les élèves (qui bien sûr les ignorent) et les enseignants (qui bien sûr les connaissent). Par exemple :

- un dessin au cycle 3 et cycle 4 peut être :
 - a) une schématisation d'objets, de relations et de propriétés géométriques ;
 - b) un objet matériel pris pour lui-même ;
 - c) un exemple générique d'une classe d'objets.

Les enseignants voient le dessin suivant a) et les élèves suivant b) ou c).

- Les conceptions de la droite ou du point des élèves de sixième sont plus proches de celles des mathématiciens grecs que de celles des mathématiciens du vingtième siècle, sous-jacentes aux conceptions des enseignants (mais rarement explicitement).

Une origine empirique est parfois attribuée à la connaissance de l'une ou l'autre des versions du théorème de Thalès.¹⁵ Il est possible de lui opposer un **raisonnement intuitif** du type :

Deux bâtons posés l'un sur l'autre produisent une ombre dont la longueur est la somme des longueurs des ombres de chacun. On passe ensuite aux multiples entiers par addition itérée, puis aux multiples fractionnaires par changement d'unité.

Un tel raisonnement est implicite dans les exercices proposés sur ce sujet au cycle 3 ou au début du cycle 4. Il ne relève ni d'une démarche hypothético-déductive, ni de l'empirisme des sciences expérimentales. Il n'est cependant pas dénué de validité et montre qu'entre une *démarche empirique* et une *démarche hypothético-déductive*, il y a place pour un *raisonnement intuitif* qui ne relève pas de la pratique du physicien. Une étape dans laquelle les connaissances mathématiques seraient traitées comme une loi physique, à travers la mesure de grandeurs liées, n'est pas nécessaire : la propriété de Thalès est plus facile à construire suivant un raisonnement intuitif que suivant une démarche expérimentale.

Il faut aussi envisager la question du changement de paradigme à des fins pédagogiques : si l'enseignement de la géométrie se veut un passage d'un paradigme à un autre, quelles forces peuvent conduire les élèves à l'emprunter ? Une adhésion à une *démarche hypothético-déductive* en géométrie nécessite d'une part la prise de conscience de l'existence de liens rationnels entre connaissances géométriques,

14. Par exemple, les programmes de 2009 de bac professionnel ont tenté d'instituer une pratique des mathématiques fondées sur l'expérimentation.

15. Par exemple Sir Thomas Heath écrit dans *A History of Greek Mathematics* vol. 1 page 129-130 : « Thales could not have failed to observe that, at the time when the shadow of a particular object is equal to its height, the same relation holds for all other objects casting a shadow ; this he would probably infer by induction, after making actual measurements in a considerable number of cases at a time when he found the length of the shadow of one object to be equal to its height. »

d'autre part un besoin d'axiomes. Dans (Caveing, 1998, p. 499), on lit : « ... la connaissance du Cosmos est pour un Grec celle de l'Être même : en tant que telle, elle ne saurait souffrir d'être approchée ; il lui faut être "science", ce que précisément dit le mot "mathema". » On imagine bien que la connaissance de l'être même risque de ne pas être une force suffisante pour motiver un changement de paradigme au collège ! Le moteur de la recherche de principes premiers ne peut fonctionner dans l'enseignement. Si l'on y tient, il faut en trouver d'autres.

Références bibliographiques

- BISSON Luc, MACÉ Arnaud & THERME Anne-Laure, 2012, *Lire les présocratiques*, (édition 2018), Paris, Presses Universitaires de France.
- CAVEING Maurice, 1997, *La constitution du type mathématique de l'idéalité dans la pensée grecque, La figure et le nombre - Recherches sur les premières mathématiques des Grecs*, vol. 2, Villeneuve d'Ascq, Presses Universitaires du Septentrion.
- CAVEING Maurice, 1998, *L'histoire des mathématiques de l'Antiquité*, Revue de Synthèse 119 (4), p.485-510.
- DELIRE Jean-Michel, 2016, *Les mathématiques de l'autel védique. Le Baudhāyana Śulbasūtra et son commentaire Śulbadīpikā*, Geneve, Droz.
- EUCLIDE, 1994, *Les Éléments*, vol. 1 à 4, notes et commentaires par Bernard Vitrac, Paris, PUF.
- HOUEMENT Catherine, 2007, « Paradigmes géométriques et enseignement de la géométrie », *Repères IREM*, 67, p. 69-84.
- HOUEMENT Catherine & KUZNIK Alain, 2006, « Paradigmes géométriques et enseignement de la géométrie », *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 11, p. 175-193.
- KELLER Olivier, 2000, « La géométrie des sulbasutras. Exemple de géométrie rituelle de l'Inde védique : l'agrandissement de l'autel en forme de faucon », *Repères IREM*, 40, p. 115-124.
- KUHN Thomas S., 1962, *La Structure des révolutions scientifiques*, Paris, Flammarion, coll. « Champs », édition 1983.
- KICHENASSAMY Satyanad, 2006, « Baudhāyana's rule for the quadrature of the circle », *Historia Mathematica*, 33, p. 149-183.
- PETITFOUR Édith, 2015, *Enseignement de la géométrie à des élèves en difficulté d'apprentissage : étude du processus d'accès à la géométrie d'élèves dyspraxiques visuo-spatiaux lors de la transition CM2-6ème* Thèse de doctorat, Paris, Université Paris Diderot.
- SEN S.N., BAG A.K., 1983, *The Śulbasūtras of Baudhāyana, Āpastamba, Kātyāyana and Mānava*, New Dehli, Indian National Science Academy.
- TANGUAY Denis & GEERAERTS Loïc, 2012, « D'une géométrie du perceptible à une géométrie déductive : à la recherche du paradigme manquant », *Petit x*, 88, p. 5-24.
- THIBAUT George, 1875, *On the Śulbasūtras*, Calcutta, Baptist Mission Press.