20

Comment structurer l'étude des expressions géométriques de la proportionnalité au cycle 4 ?

Frédéric LAURENT

Introduction

Cet article est le fruit de travaux menés au sein du groupe AHMES (« Apports de l'histoire et de l'épistémologie des mathématiques aux enseignants du secondaire ») de l'IREM de Clermont-Ferrand. Ce groupe, constitué de neuf membres (deux professeurs en collège, cinq professeurs en lycée, un enseignant chercheur à l'Inspé de Clermont et un professeur en poste partagé entre un lycée et l'Inspé), s'est fixé comme objectif d'éclairer, grâce à l'histoire et l'épistémologie, un certain nombre des notions contenues dans les programmes officiels de mathématiques du secondaire. Dans ce cadre, le groupe se trouve être force de proposition pour la formation initiale et continue des enseignants au niveau de la région Auvergne en participant à une unité d'enseignement d'histoire et d'épistémologie des mathématiques auprès des étudiants professeurs stagiaires en Master 2 MEEF (et pour cela en produisant des documents de formation à leur intention) mais aussi dans le cadre du plan académique de formation, en concevant des stages pour les professeurs titulaires.

L'idée directrice du groupe est de montrer comment l'enseignant peut enrichir sa compréhension des concepts contenus dans les programmes d'enseignement et se familiariser avec des aspects didactiques de sa discipline en s'appuyant sur un éclairage historique et épistémologique. Ainsi, nous nous intéressons à des notions qui posent question, voire qui nous donnent des difficultés lors de notre travail de conception de séquences. Nous cherchons à mieux comprendre d'où viennent ces éventuelles difficultés dans le but de parvenir à les surmonter pour que, *in fine*, les élèves en soient les bénéficiaires lors de notre enseignement. Le recours à l'histoire n'est donc pas nécessairement visible par l'élève, mais fait partie de ce qu'il est coutume d'appeler le travail invisible de l'enseignant.

Dans le cadre de ces recherches, nous nous sommes plus particulièrement intéressés au théorème de Thalès au cycle 4 et, de façon plus globale, aux expressions géométriques de la proportionnalité au cours de ce même cycle. En effet, avec les programmes de collège de 2016, les triangles semblables ont fait leur réapparition, ce qui nous a conduits à nous interroger sur l'intégration de cette nouvelle notion à l'enseignement existant. Quelles stratégies pour les enseigner en lien avec le théorème de Thalès, les homothéties, les agrandissements-réductions ? Car, il nous semble que toutes ces notions sont proches et difficiles à organiser au sein d'une progression au cycle 4.

Si, d'après les recommandations officielles contenues dans les repères annuels de progression parus en 2018-2019 [1], le théorème de Thalès doit être enseigné aux niveaux 4e (configuration « des triangles emboîtés ») et 3e (configuration « papillon »), ce dernier a-t-il encore une quelconque utilité ? Sa présence ne constitue-t-elle pas un obstacle supplémentaire pour le professeur lors de la conception d'une progression ? Comment et pourquoi introduire ce fameux théorème ?

Nous tenterons de mettre en évidence les difficultés et les enjeux liés à l'enseignement de la proportionnalité en géométrie au cycle 4 grâce à des analyses de textes historiques mais également de productions d'élèves. Nous commencerons par mettre en évidence la cohabitation compliquée entre théorème de Thalès et proportionnalité en géométrie, puis chercherons, dans un corpus de textes historiques, à éclairer ces relations. Nous terminerons cette étude en soulignant la complexité et la multiplicité des expressions de la proportionnalité en géométrie et en proposant une réorganisation possible de son étude au cours du cycle 4.

Analyse didactique

La configuration type et la terminologie associée

Pour commencer, il nous semble important de faire une mise au point sur le vocabulaire que nous allons employer dans ce texte en rapport avec la configuration type que nous avons considérée (figure 1).

1. Dans le programme du cycle 4 paru au BO spécial n°11 du 26 novembre 2015, on pouvait lire dans les repères de progressivité préconisés : « le théorème de Thalès est introduit en 3e, en liaison étroite avec la proportionnalité et l'homothétie, mais aussi les agrandissements et réductions. [...] Les homothéties sont amenées en 3e, en lien avec les configurations de Thalès, la proportionnalité, les fonctions linéaires, les rapports d'agrandissement ou de réduction des grandeurs géométriques ». Ce texte officiel laissait les enseignants libres d'organiser leur progression sur l'ensemble du cycle 4 et, en particulier, n'imposait pas de niveau de classe pour l'introduction des triangles semblables. Ces repères ont été supprimés et remplacés par des repères de progression parus au BO n° 22 du 29 mai 2019. Selon ces nouvelles directives, l'introduction du théorème de Thalès dans la configuration « triangles emboîtés » et de sa réciproque doit avoir lieu en 4e tandis que la configuration « papillon » doit être abordée en 3e ainsi qu'une définition et une caractérisation des triangles semblables. C'est également en 3e que les homothéties sont traitées et que le lien avec le théorème de Thalès est établi.

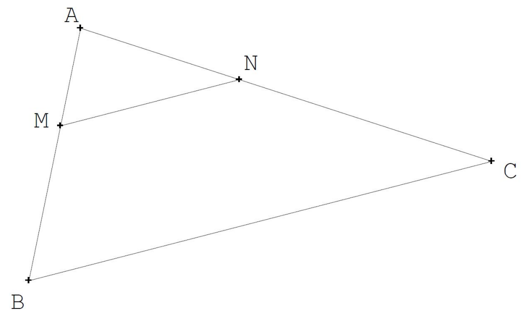


FIGURE 1 – « Configuration de Thalès »

Bien qu'il soit presque certain que le théorème qui fait l'objet de notre enseignement n'ait pas été formulé par Thalès lui-même (Herreman, IREM de Rennes [2]), du moins sous la forme ci-dessous que nous lui connaissons, nous parlerons du « théorème de Thalès » pour désigner l'énoncé : « si M et N sont deux points appartenant respectivement aux côtés (AB) et (AC) d'un triangle ABC et tels que les droites (MN) et (BC) soient parallèles, alors $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AN}{AC} = \dfrac{MN}{BC}$ ». Nous qualifierons parfois de « canoniques » ces égalités de rapports.

Nous évoquerons la « similitude des triangles » pour indiquer que, dans les conditions du théorème de Thalès précédemment décrit, les triangles AMN et ABC sont semblables. Rappelons que deux triangles sont semblables si l'un est l'image de l'autre par une similitude et que la similitude de deux triangles peut se caractériser de trois façons équivalentes (les « cas de similitude ») : par la proportionnalité des longueurs de deux côtés et l'égalité de l'angle adjacent à ces côtés, par l'égalité des trois angles (en réalité l'égalité de deux suffit), on parle alors de triangles équiangles, et enfin par la proportionnalité des longueurs des côtés. En classe, il est d'usage de donner l'une des deux dernières caractérisations comme définition de deux triangles semblables et de considérer l'autre comme une propriété.

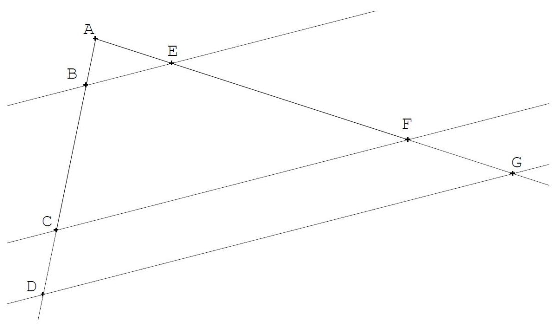


FIGURE 2 – « Configuration des lignes proportionnelles »

2. HERREMAN Alain, « Aux sources du théorème de Thalès », http://thamous.univ-rennes1.fr/forums/forums/42/exportIrem/ (consulté le 02/11/2019)

Nous ferons parfois référence à la « configuration de Thalès » pour désigner la configuration géométrique obtenue avec les conditions du théorème de Thalès énoncé plus haut, à savoir la configuration des triangles emboîtés ou en position « papillon ». Enfin, nous parlerons du « théorème des lignes proportionnelles » pour désigner le théorème qui affirme que deux droites sécantes sont coupées en parties proportionnelles par des droites parallèles (figure 2).

Nous dégageons ainsi trois façons principales d'exprimer la proportionnalité géométrique sous-jacente dans une configuration de Thalès : le théorème de Thalès, la similitude des triangles et le théorème des lignes proportionnelles.

Pour mettre en évidence les difficultés soulevées par le théorème de Thalès, tel qu'il se trouve enseigné aujourd'hui en France, nous avons soumis le problème suivant à des élèves de 3^{e} et de 2nde au début de l'année scolaire 2018-2019.

Problème :
M et N sont deux points appartenant aux côtés $[AB]$ et $[AC]$ du triangle ABC.
La droite (MN) est parallèle à la droite (BC).
On donne : $AM = 3$, $MB = 6$, $AN = 5$ et $BC = 12$. Calculer les longueurs NC et MN.

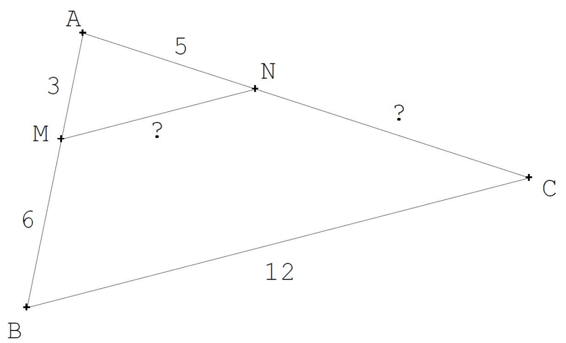


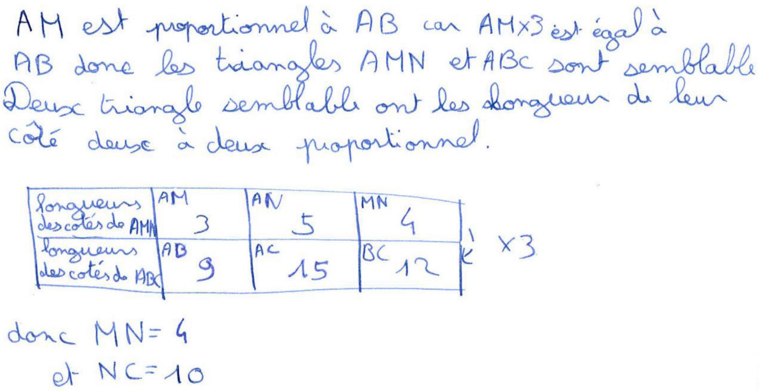
FIGURE 3 – Problème soumis aux élèves de 3^{e} et de 2nde

En choisissant cette configuration, nous souhaitons faire cohabiter des situations de proportionnalité différentes selon qu'on y voit la configuration de Thalès pour appliquer le théorème de Thalès (ou reconnaître deux triangles semblables) ou qu'on y voit une configuration des lignes proportionnelles. Parmi nos autres choix didactiques, il faut souligner celui qui concerne la façon d'indiquer les données numériques sur la configuration ; nous verrons, lors des analyses des productions d'élèves, que ces indications ont une conséquence dans les procédures suivies ou les erreurs éventuellement commises. Il en va de même pour le choix des valeurs numériques elles-mêmes. Notons au passage que nous avons commis l'abus de langage consistant à identifier grandeur et mesure de grandeur dans notre énoncé et que cet abus sera poursuivi dans la suite de cet article.

Mais plutôt que d'expliciter, de façon fastidieuse, l'ensemble de nos choix didactiques, nous proposons maintenant de passer à l'analyse des productions d'élèves. Ces analyses justifieront *a posteriori* certains des choix qui furent les nôtres pour mettre en évidence les problèmes liés à la proportionnalité contenue dans la figure.

Analyse des productions des élèves de 3e

Nous présentons ici trois productions, les plus intéressantes et caractéristiques à nos yeux, parmi celles des élèves de la classe de 3e (figures 4, 5 et 6). Précisons que l'ensemble des élèves de la classe à qui le problème a été soumis n'avait pas encore étudié le théorème de Thalès. Ils n'avaient donc à leur disposition éventuelle, que la similitude des triangles, notion que leur professeur avait étudiée l'année précédente (en classe de 4e) [3].



AM est proportionnel à AB car AM×3 est égal à AB donc les triangles AMN et ABc sont semblable Deux triangle semblable ont les longueur de leur côté deux à deux proportionnel.

longueurs des cotés de AMN	AM 3	AN 5	MN 4	×3
longueurs des cotés de ABC	AB 9	AC 15	BC 12	

donc MN = 4
et NC = 10

Figure 4 – Production d'un élève de 3e, désigné par « élève A »

L'élève A utilise la similitude des triangles AMN et ABC. Il ne justifie pas correctement la similitude de ces deux triangles : en effet, il semble justifier leur similitude par la présence d'une certaine « proportionnalité dans la configuration ». Puis il cite le théorème évoquant la proportionnalité des longueurs des côtés de deux triangles semblables pour déterminer les longueurs manquantes. Pour ce faire, il a recours au registre des tableaux dans lequel il indique de façon précise « longueurs des côtés du triangle AMN » et « longueurs des côtés du triangle ABC ». Sur ce tableau de proportionnalité, il met en évidence le coefficient de proportionnalité 3. Ses calculs de MN et NC sont corrects (mais il ne détaille pas le passage de AC à NC).

3. Précisions à nouveau que les programmes du cycle 4 de l'époque laissaient les enseignants libres d'organiser l'apprentissage des triangles semblables au cours du cycle 4, voire encourageaient leur étude en classe de 4e (dans les accompagnements de programmes il était écrit que les triangles semblables fournissent un vocabulaire commode dans les différents énoncés du théorème de Thalès). De plus, en classe de 5e, les élèves étaient amenés (et le sont toujours) à travailler sur les cas d'égalité des triangles. Une telle étude conduit naturellement à se poser la question de savoir si la donnée des trois angles d'un triangle suffit à déterminer un triangle de façon unique ; en d'autres termes, savoir si deux triangles équiangles sont égaux ou non. Dans cette logique, les triangles semblables sont définis par l'enseignant comme des triangles équiangles (ce que l'on trouve dans nombre de ressources pour la classe). Indiquons que cette définition n'interdit pas de s'intéresser aux agrandissements ou réductions de polygones de façon plus générale. Dans tous les cas, les triangles semblables sont ensuite caractérisés par la proportionnalité des longueurs de leurs côtés. L'objet de cet article est précisément de questionner l'agencement de ces différentes notions.

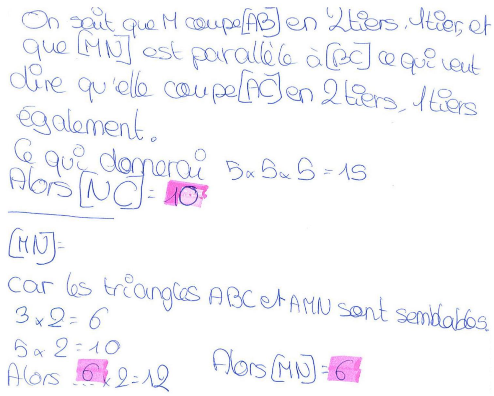


FIGURE 5 – Production d'un élève de 3^{e}, désigné par « élève B »

L'élève B quant à lui utilise deux procédures différentes : les lignes proportionnelles et la similitude. Pour le calcul de NC, il évoque la proportionnalité induite par le tracé de la parallèle : il fait donc référence, sans le savoir, au théorème des lignes proportionnelles. Il obtient le rapport 2 en expliquant clairement que la droite parallèle coupe un côté du triangle en « deux tiers – un tiers » donc qu'elle doit couper l'autre côté dans la même proportion. Il calcule AC (en écrivant d'ailleurs $5 \times 5 \times 5$ au lieu de $5+5+5$ ou de 3×5) puis en déduit la bonne longueur pour NC. Cet élève a le contrôle de son résultat grâce la proportion « deux tiers – un tiers » traduite par le coefficient de proportionnalité 2. Pour le calcul de MN, cet élève évoque la similitude des triangles AMN et ABC. Il doit changer de procédure car la proportionnalité cachée entre MN et BC ne semble plus évidente. Il exprime donc BC en fonction de MN, mais en utilisant le même rapport que précédemment. Il obtient donc 6 à la place de 4. Cet élève n'a pas conscience que le rapport de similitude n'est pas égal au rapport utilisé précédemment avec les lignes proportionnelles. On observe ainsi que l'évidente proportionnalité générée par les lignes proportionnelles (i.e. le partage deux tiers – un tiers) perturbe l'application du théorème sur les triangles semblables.

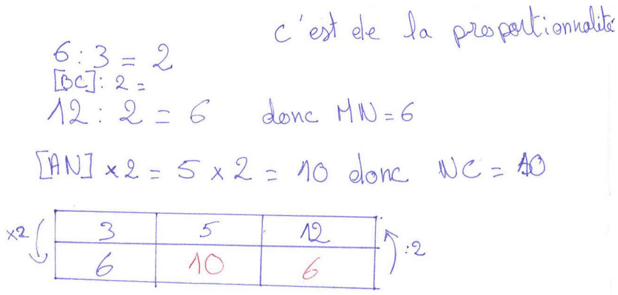


FIGURE 6 – Production d'un élève de 3^{e}, désigné par « élève C »

L'élève C fait uniquement référence à de la « proportionnalité » sans citer la similitude de deux triangles. Il met en évidence, comme l'élève B, mais sans l'expliquer en français, le rapport 2 des lignes proportionnelles. Il utilise ensuite ce rapport pour trouver $MN = 6$ et $NC = 10$. Pour déterminer ces valeurs, l'élève semble avoir eu recours au registre des tableaux (tableau de proportionnalité) mais cette représentation ne paraît pas pleinement maîtrisée : le dernier couple de valeurs étant inversé, deux rapports différents sont en jeu (2 et $1/2$) dans le même tableau de proportionnalité.

Pour conclure, on constate que certains élèves évoquent de façon naturelle la proportionnalité. Et n'ont-ils pas raison de le faire ? Car, en effet, si dans le domaine du numérique, on leur avait posé le problème suivant : « On a payé 5 € pour l'achat de 3 pâtisseries. Combien doit-on payer pour acheter 6 pâtisseries ? », nous aurions trouvé assez naturel qu'ils répondent 10 € sans autre justification. Ils ont donc conscience que cette configuration de Thalès contient de façon intrinsèque des grandeurs proportionnelles. Si cette perception peut être purement intuitive pour certains, elle peut aussi s'expliquer par le souvenir de connaissances scolaires qu'ils ne parviennent pas à restituer (car ils ont étudié ce type de configuration en classe l'année précédente et peuvent se rappeler que la figure contenait « de la proportionnalité »), mais aussi par des pratiques antérieures (utilisation d'un guide-âne ou des lignes du cahier pour partager des segments) ou encore par le fait que le modèle de proportionnalité est celui vers lequel ils se tournent naturellement car il est simple et familier. Dans tous les cas, ils n'ont pas de difficulté à expliciter la proportionnalité générée par le tracé de la parallèle : cette droite permet de reporter le découpage proportionnel d'un côté du triangle sur un autre côté. C'est un peu le pendant géométrique du problème numérique précédent : notre choix d'indiquer les valeurs numériques sur la configuration conduit donc les élèves à interpréter la figure comme une représentation de la proportionnalité (un peu à la façon d'un tableau de proportionnalité dans le domaine du numérique). En revanche, ils ne réalisent pas que la figure contient d'autres grandeurs proportionnelles, notamment la proportionnalité des longueurs des côtés des deux triangles déterminés par la parallèle. Il faut également signaler que, pour ce faire, les élèves doivent mettre en relation des segments inclus les uns dans les autres ($[AM] \subset [AB]$ et $[AN] \subset [AC]$), ce qui est moins évident que de mettre en relation des segments juxtaposés, tels que $[AM]$ et $[MB]$; mise en relation facilitée par le choix des indications numériques sur la figure.

Dans la suite de notre étude, nous avons donc décidé de distinguer deux procédures parmi celles qui ont été observées au collège : nous avons désigné par S les procédures relevant de la similitude des triangles avec deux sous-catégories S1 et S2, sans tenir compte des justifications préalables mais en se focalisant uniquement sur la mise en œuvre de la proportionnalité. Plus précisément, la dénomination S1 caractérise les procédures relevant d'une utilisation tout à fait correcte de la proportionnalité dans le cadre de la similitude des triangles, tandis que la dénomination S2 caractérise celles qui témoignent d'une difficulté dans la compréhension de la proportionnalité sur la globalité de la figure à cause de la perturbation engendrée par le théorème des lignes proportionnelles. Enfin, par la lettre P, nous évoquerons les procédures qui s'apparentent à celles de l'élève C qui dit simplement : « c'est de la proportionnalité » !

Analyse des productions des élèves de 2^{nde}

Les élèves de 2^{nde} ayant tous étudié le théorème de Thalès au collège, on distingue de nouvelles solutions au problème, d'ailleurs les plus nombreuses. Nous avons désigné par T les procédures relevant du théorème de Thalès avec une distinction, comme précédemment, entre les procédures type T1 qui montrent une utilisation convenable des rapports de proportionnalité lors de l'application du théorème (nous n'avons donc pas pris en compte les justifications préalables expliquant pourquoi le théorème s'applique dans cette configuration) et les procédures de type T2 dans lesquelles une erreur relevant de la compréhension de la proportionnalité sous-jacente à la figure est constatée.

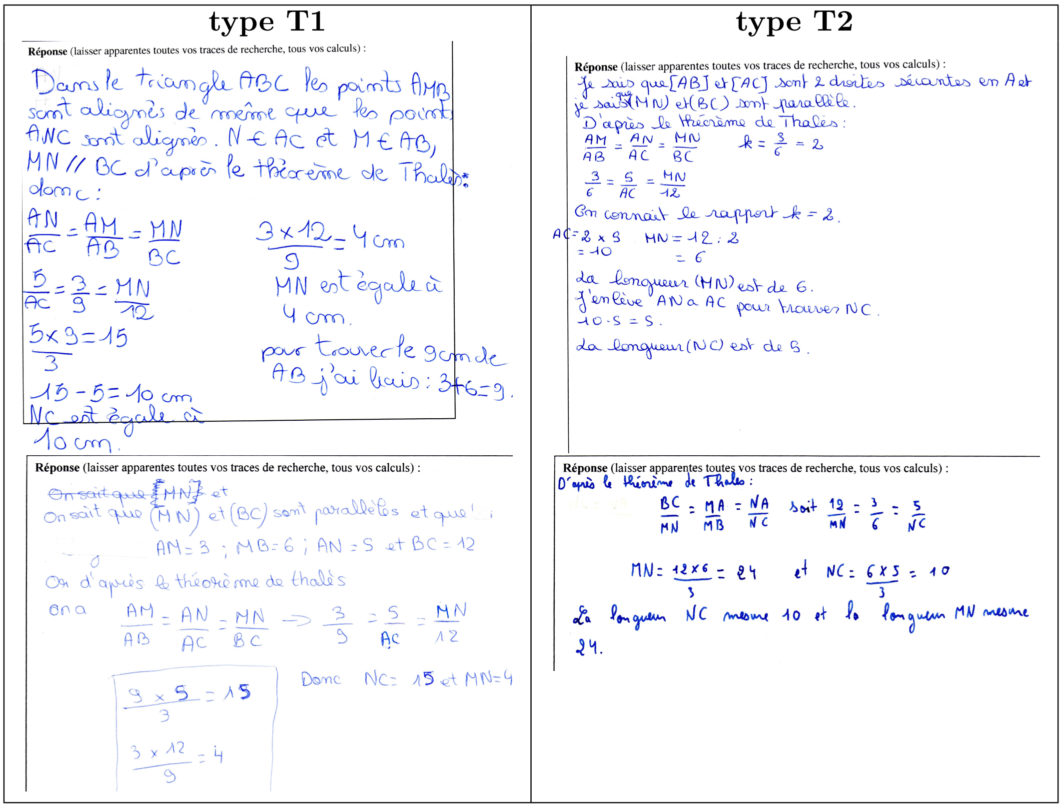


FIGURE 7 – Productions d'élèves de 2^{nde}

Les procédures S1 et S2, évoquées lors de l'analyse des productions des collégiens, sont elles aussi observées dans les méthodes choisies par les lycéens, mais elles apparaissent moins fréquemment que le recours au fameux théorème.

Le recours simple à de la proportionnalité, c'est-à-dire une résolution ne s'appuyant ni sur le théorème de Thalès ni sur la similitude des triangles et désignée plus haut par la lettre P, est également observé. Toutes les autres procédures erronées (utilisation du théorème de Pythagore par exemple et dans la plupart des cas) seront regroupées sous la lettre A.

Avec cette terminologie désormais complète, voici les données statistiques, permettant de dresser le bilan de nos observations en classe de 2^{nde}, que nous avons recueillies :

- procédures utilisées par les élèves de 2^{nde} selon notre classification :

procédure	T1	T2	S1	S2	P	A	∅	total
effectif	96	69	11	4	12	23	8	223
fréquence	43 %	31 %	5 %	2 %	5 %	10 %	4 %	100 %

- résumé des différentes valeurs trouvées pour les longueurs MN et NC pour tous les élèves ayant utilisé une procédure autre que A (192 élèves au total) :

procédures	valeurs					
	$MN = 4$	$MN = 6$	autre valeur de MN	$NC = 10$	$NC = 5$	autre valeur de NC
T1	85	0	3	71	0	6
T2	0	60	3	25	21	3
S1	9	0	0	5	1	0
S2	0	4	0	3	0	0
P	2	2	4	11	0	0
eff. total	**96***	**66**	**10**	**115****	**22**	**9**

* soit environ 43 % de réussite ** soit environ 52 % de réussite

Dans ce dernier tableau, nous constatons que la longueur NC est plus souvent correctement calculée que la longueur MN. Nous voyons deux raisons à cela.

D'abord les élèves ayant commis une erreur dans l'application du théorème de Thalès ou des triangles semblables (procédures T2 et S2) parviennent, malgré cette erreur, pour plus d'un tiers d'entre eux à calculer correctement NC. En effet, en utilisant (de façon consciente ou non) le rapport 2 des lignes proportionnelles, ils peuvent déterminer NC de façon correcte même si MN est erroné.

Ensuite, un certain nombre d'élèves (env. 5 %) n'ont pas utilisé les connaissances enseignées (théorème de Thalès ou triangles semblables) pour calculer la longueur NC mais ont simplement évoqué une proportionnalité « sous-jacente » à la figure (principalement les rapports des lignes proportionnelles, beaucoup plus rarement les rapports de projection). Cette compréhension intuitive de la configuration leur permet de déterminer correctement la longueur NC même s'ils ne parviennent pas à calculer la longueur MN. Il peut même arriver qu'un élève donne une bonne réponse pour NC sans laisser de trace de justification car il « voit » la proportionnalité et n'éprouve pas le besoin de le dire !

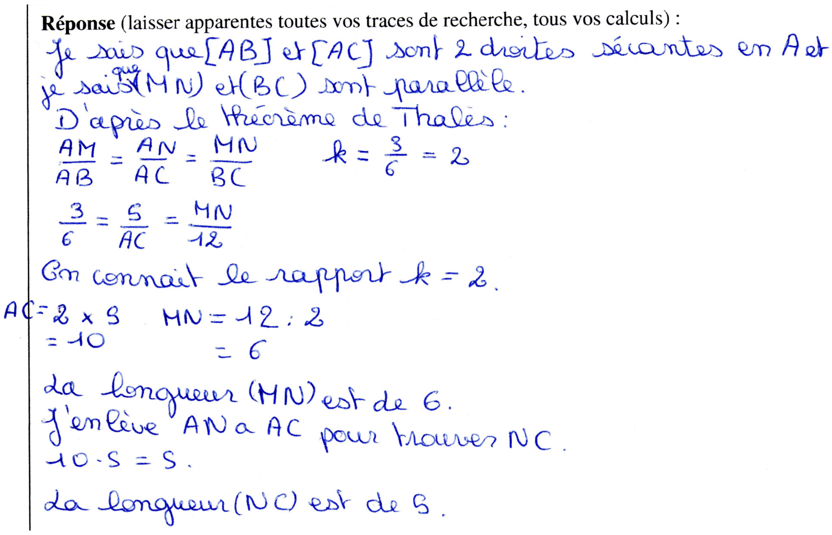
Sur ces données, nous observons également un autre phénomène très intéressant : les élèves ayant utilisé convenablement leurs outils (procédures T1 ou S1) parviennent en majorité à calculer correctement MN (env. 88 %) plutôt que NC (seulement 71 %). Cela peut sembler paradoxal car la longueur la plus accessible, compte tenu du choix de nos variables didactiques pour la situation, est $NC = 10$. Ce phénomène s'explique par le fait que ces deux outils font intervenir directement MN dans la traduction géométrique de la proportionnalité, mais pas NC. La longueur NC doit être calculée après avoir déterminé AC, longueur qui apparaît explicitement dans les rapports au même titre que MN. Ainsi, plusieurs élèves calculent AC et pensent avoir trouvé la longueur NC. D'autres oublient tout simplement de calculer la longueur NC et ne traitent que le calcul de MN. On note donc que le théorème de Thalès, ou sa version triangles semblables, brouille la perception d'une proportionnalité plus évidente liée à la configuration. Il est clair que les élèves appliquent une procédure de façon mécanique (voire automatique) sans garder le contrôle du résultat.

Quant aux élèves relevant des procédures T2 ou S2, ils trouvent, aux erreurs de calcul près, que $MN = 6$ (env. 93 % d'entre eux trouvent cette valeur). Ceux qui relèvent de T2 peuvent être classés en deux sous-catégories :

- ceux qui écrivent une égalité de rapports correcte, comme $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$, mais remplacent AB par 6 au lieu de 9 ;
- ceux qui écrivent une égalité de rapports incorrecte, par exemple : $\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC} = \frac{MN}{BC}$.

Avec un premier niveau de lecture, on peut penser que les élèves ayant remplacé AB par 6 au lieu de 9, ont commis une étourderie. Mais la fréquence de cette erreur interroge : s'agit-il simplement d'une étourderie ?

Pour une partie d'entre eux, nous pouvons le supposer, mais l'origine de cette erreur est sans doute plus profonde. Elle est vraisemblablement liée à la situation soumise aux élèves dans laquelle nous avons choisi d'indiquer les longueurs sur la figure. Les élèves perçoivent de façon intuitive la proportionnalité contenue dans le partage du segment $[AB]$ par la parallèle (MN) (ils « voient » écrit le rapport $3/6$). D'ailleurs, certains font explicitement référence à un rapport :


Réponse (laisser apparentes toutes vos traces de recherche, tous vos calculs) :

Je sais que [AB] et [AC] sont 2 droites sécantes en A et je sais que (MN) et (BC) sont parallèle.

D'après le théorème de Thalès :

$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$ $\quad k = \frac{3}{6} = 2$

$\frac{3}{6} = \frac{5}{AC} = \frac{MN}{12}$

On connait le rapport $k = 2$.

$AC = 2 \times 5 = 10$ $\quad MN = 12 : 2 = 6$

La longueur (MN) est de 6.

J'enlève AN a AC pour trouver NC.

$10 - 5 = 5$.

La longueur (NC) est de 5.

FIGURE 8 – Production d'un élève de 2^{nde}

Cela témoigne non pas d'une simple étourderie mais du repérage d'un rapport de proportionnalité évident sur la figure qui génère une confusion. Le problème est que ce rapport de 2 (ou $1/2$ selon l'interprétation) n'est pas celui qui est en jeu dans l'application du théorème de Thalès (3 ou $1/3$). Les élèves n'ont pas conscience que deux traductions de la proportionnalité contenue dans la figure sont en conflit.

Enfin, s'il s'agissait d'une simple étourderie, nous ne devrions pas constater que des élèves ayant convenablement écrit les égalités de rapports du théorème de Thalès parviennent à déterminer la réponse correcte $NC = 10$. Comment y parviennent-ils ? Tout simplement en substituant $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$ à l'égalité $\frac{3}{6} = \frac{5}{NC}$, autrement dit, en basculant en cours de route vers l'exploitation des rapports fournis par le théorème des lignes proportionnelles.

Pour conclure, il nous semble que le théorème de Thalès a tendance à enfermer quelques élèves dans une procédure mécanique dont ils perdent le sens. Nombreux sont ceux qui parviennent au résultat $NC = 5$ mais ne remettent pas en cause leur réponse. La réponse est celle produite par le théorème et le calcul d'une quatrième proportionnelle. Si la configuration trouble leur application du théorème de Thalès, elle ne leur permet pas, *a posteriori*, de vérifier la cohérence de leur réponse.

D'autre part, une partie des élèves aimerait se dégager du carcan du théorème de Thalès pour calculer $NC = 10$, qui leur paraît comme une évidence graphique, en exploitant d'autres rapports. Mais comme ils n'ont pas conscience que ces rapports ne sont pas les mêmes que ceux du fameux théorème, cela les conduit à une valeur erronée de MN. Cela montre que tous les élèves n'identifient pas des côtés de deux triangles lorsqu'ils écrivent les rapports de longueurs fournis par le théorème de Thalès : ils dissocient donc ce théorème de celui des triangles semblables alors qu'il n'en est qu'un cas particulier. Pour ces raisons, il nous semble que l'égalité $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$ n'est pas perçue comme une représentation de la proportionnalité chez de nombreux élèves, alors que l'utilisation des triangles semblables conduit à une représentation plus stable (parfois aidée d'un tableau de proportionnalité). Notons que ce sentiment est renforcé par le fait qu'une infime partie des élèves s'autorise à écrire l'égalité des rapports inverses, comme s'ils avaient reçu la consigne de diviser systématiquement la plus petite longueur par la plus grande.

Au niveau global, une large majorité des élèves de seconde fait référence au théorème de Thalès (env. 74 %) et très peu utilisent la similitude des triangles (moins de 7%). Il est à noter que certains élèves n'écrivent qu'une suite d'égalités de rapports sans évoquer le nom de Thalès, mais l'écriture « canonique » de ces rapports semble privilégier le théorème de Thalès aux triangles semblables. D'autres, plus rares encore, évoquent à la fois le théorème de Thalès et la similitude des triangles, mais utilisent l'écriture « canonique » des rapports pour calculer les longueurs manquantes (pas de recours à des tableaux de proportionnalité par exemple). Cette utilisation massive du théorème de Thalès peut avoir plusieurs explications.

La première raison peut provenir d'un effet de « culture collective » : au collège, tout individu a étudié les célèbres théorèmes de Thalès et de Pythagore. Parfois les élèves connaissent les noms de ces deux mathématiciens grecs avant même d'avoir étudié les théorèmes en classe. La seconde est que le théorème de Thalès permet une justification plus courte : les élèves font juste le recensement des hypothèses (les points alignés et la parallèle) alors que l'emploi de la similitude oblige à prouver dans un premier temps que les deux triangles sont équiangles. La troisième raison est que le théorème de Thalès est associé à la configuration de Thalès : les élèves sont conditionnés à reconnaître une « figure clé » lorsque deux triangles sont emboîtés ou en position « papillon ». Cette configuration a peut-être tendance à masquer la similitude des deux triangles, comme s'il s'agissait de deux énoncés indépendants (un théorème chasse l'autre). La quatrième raison est que le théorème de Thalès permet une traduction de la proportionnalité plus calculatoire, ce qui peut être perçu comme un avantage : l'égalité des trois rapports évite par exemple l'énoncé en français de la proportionnalité des longueurs des côtés des deux triangles, mais aussi le registre des tableaux pour exprimer la proportionnalité. De plus, suite à ces égalités, les élèves calculent de façon automatisée les quatrièmes proportionnelles manquantes en laissant une trace de leurs calculs : cette méthode a peut-être la préférence des professeurs pour des raisons pédagogiques. Les élèves produisent tous le même raisonnement alors que l'utilisation de la proportionnalité des longueurs des côtés peut donner lieu à toutes les procédures connues pour traiter de proportionnalité : retour à l'unité, homogénéité, coefficients de proportionnalité, produits en croix, etc. Enfin, la cinquième et dernière raison que nous avançons, est que, selon les repères de progressivité des programmes (du moins jusqu'en 2018) [4], le théorème de Thalès constitue un outil plus récent dans le cursus des élèves que la similitude des triangles.

Bilan de l'analyse didactique

Pour résumer toute cette étude, nous pouvons dire que, sur la configuration de Thalès, le théorème des lignes proportionnelles semble être, conformément à nos hypothèses, une expression plus naturelle, voire intuitive, d'une proportionnalité de longueurs sous-jacente à la figure. Mais cette expression entre clairement en conflit avec le théorème de Thalès de plusieurs façons. Certains élèves s'appuient sur l'évidence des lignes proportionnelles et mélangent, tôt ou tard, les rapports du partage proportionnel avec le rapport d'agrandissement-réduction contenu dans le théorème de Thalès. À l'inverse, d'autres s'appuient sur l'évidence du théorème de Thalès liée à la figure clé mais perdent le contrôle de l'évidente proportionnalité du partage.

Enfin, le théorème de Thalès n'est pas perçu comme un cas particulier de la similitude des triangles et la méthode générale de la similitude est délaissée au profit de cet outil entraînant une perte de sens concernant la représentation et l'expression de la proportionnalité. En appliquant ce théorème, certains élèves n'ont plus pleinement conscience d'un problème de proportionnalité et la détermination des longueurs manquantes est réalisée par une procédure automatisée utilisant l'égalité des produits en croix, qu'il serait peut-être bon de nommer, comme par le passé, recherche de la quatrième proportionnelle.

Ainsi, il nous semble que vu son caractère intuitif et sa faculté à représenter géométriquement la proportionnalité, le théorème des lignes proportionnelles constitue un noyau primitif qu'il serait bon d'expliciter aux élèves, plutôt que de le cacher. Ensuite, la procédure de la similitude des triangles devrait être privilégiée à celle plus mécanique du théorème de Thalès, dans la mesure où elle permet une

4. Voir note précédente.

meilleure identification de grandeurs proportionnelles tout en étant aussi efficace et plus générale.

Nous allons montrer à présent, par le biais de lectures de textes fondateurs, de quelle façon la proportionnalité contenue dans la configuration de Thalès a été exprimée et comment s'est articulée autour d'elle l'étude de la similitude des triangles. Nous verrons très rapidement que cette expression de la proportionnalité n'a pas pris la forme du théorème de Thalès tel que nous l'enseignons.

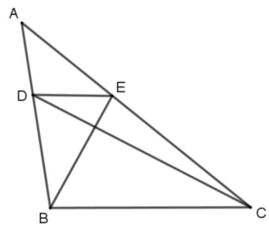
Analyse historique

Les textes du corpus

Pour mettre en évidence les expressions de la proportionnalité en géométrie au cours de l'histoire, nous avons constitué un corpus de textes incluant des extraits du livre VI des *Éléments* d'Euclide (vers 300 av. J.-C.), de *La Géométrie* de Descartes (1637), des *Éléments de géométrie* de Clairaut (1753) ainsi que des *Éléments de géométrie* de Lacroix (1799).

Malheureusement, le temps contraint en formation (qu'elle soit initiale ou continue) ne nous autorise pas à tous les étudier. Nous avons décidé de nous limiter à l'étude et à la comparaison de deux textes parmi les précédents car la lecture d'un texte, même accompagnée d'un formateur, est une activité qui nécessite du temps. Nous allons donc, dans cet article également, nous limiter à ces deux textes, en l'occurrence ceux d'Euclide et de Clairaut, et inviter le lecteur à découvrir (ou à redécouvrir) par lui-même les deux autres à titre de complément.

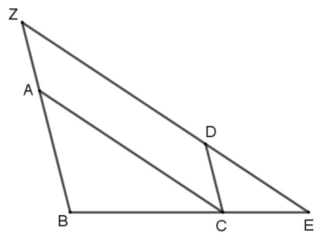
Texte n°1 : propositions 2 et 4 extraites du livre VI des *Éléments* d'Euclide dans la traduction de François Peyrard (Euclide, 1804).

> « **Proposition 2**
> Si l'on mène une droite parallèle à un des côtés d'un triangle, cette droite coupera proportionnellement les côtés de ce triangle [...].
>
> 
>
>
> Menons DE parallèle à un des côtés BC du triangle ABC ; je dis que BD est à DA comme CE est à EA. [...]
>
> Le triangle BDE sera égal au triangle CDE, parce qu'ils ont la même base, et qu'ils sont compris entre les mêmes parallèles DE, BC. Mais ADE est un autre triangle ; et des grandeurs égales ont la même raison avec une même grandeur ; donc le triangle BDE est au triangle ADE comme le triangle CDE est au triangle ADE. Mais le triangle BDE est au triangle ADE comme BD est à DA ; car ces deux triangles, qui

ont même hauteur, à savoir la perpendiculaire menée du point E sur la droite AB, sont entre eux comme leurs bases. Par la même raison le triangle CDE est au triangle ADE comme CE est à EA ; donc BD est à DA comme CE est à EA. [...]

Proposition 4

Dans les triangles équiangles, les côtés autour des angles égaux sont proportionnels ; et les côtés qui sous-tendent les angles égaux sont homologues.



Soient les triangles équiangles ABC, DCE, ayant l'angle BAC égal à l'angle CDE, l'angle ACB égal à l'angle DEC et, l'angle ABC égal à l'angle DCE ; je dis que dans les triangles ABC, DCE, les côtés autour des angles égaux sont proportionnels, et que les côtés qui sous-tendent les angles égaux sont homologues.

Plaçons la droite BC dans la direction de CE. Et puisque les angles ABC, ACB sont plus petits que deux droits, et que l'angle ACB est égal à l'angle DEC, les angles ABC, DEC sont plus petits que deux droits ; donc les droites BA, ED, étant prolongées, se rencontreront [5] ; qu'elles soient prolongées, et qu'elles se rencontrent en Z. Et puisque l'angle DCE est égal à l'angle ABC, la droite BZ est parallèle à la droite CD. De plus, puisque l'angle ACB est égal à l'angle DEC, la droite AC est parallèle à ZE ; donc la figure $ZACD$ est un parallélogramme ; donc ZA est égal à DC, et AC est égal à ZD. Et puisqu'un des côtés AC du triangle BCA, est parallèle au côté ZE, BA est à AZ comme BC est à CE, mais AZ est égal à CD ; donc BA est à CD comme BC est à CE, et, par permutation, AB est à BC comme DC est à CE. De plus, puisque CD est parallèle à BZ, BC est à CE comme ZD est à DE. Mais ZD est égal à AC ; donc BC est à CE comme AC est à ED, et, par permutation, BC est à CA comme CE est à ED. Et puisqu'on a démontré que AB est à BC comme DC est à CE, et que BC est à CA comme CE est à ED, BA sera à AC comme CD est à DE. Donc, etc. »

Texte n°2 : chapitres 33, 34, 35 et 39 extraits des *Éléments de géométrie* de Clairaut, dans l'édition de 1853 mise en accord avec le système métrique.

5. Le fait que les droites BA et ED se rencontrent résulte de la cinquième demande d'Euclide que l'on nomme souvent « postulat des parallèles ». Dans l'édition des *Éléments* choisie, datant de 1804, Peyrard renvoie à la 11^e^ notion commune à titre de justification, mais dans son édition ultérieure de 1819, les notions communes sont au nombre de neuf et la 11^e^ est devenue 5^e^ demande.

33.

Utilité de savoir construire des figures semblables à des figures données.

La méthode qu'on vient de donner pour mesurer les terrains dans lesquels on ne saurait tirer des lignes fait souvent naître de grandes difficultés dans la pratique. On trouve rarement un espace uni et libre assez grand pour faire des triangles égaux à ceux du terrain dont on cherche la mesure ; et même quand on en trouverait, la grande longueur des côtés des triangles pourrait rendre les opérations très-difficiles. Abaisser une perpendiculaire sur une ligne, d'un point qui en est éloigné seulement de 1 000 mètres, serait un ouvrage extrêmement pénible et peut-être impraticable. Il importe donc d'avoir un moyen qui supplée à ces grandes opérations.

Ce moyen s'offre comme de lui-même. Il vient bientôt dans l'esprit de représenter la figure à mesurer ABCDE (*fig.* 34 et 35) par une figure semblable *abcde*, mais

Fig. 34.

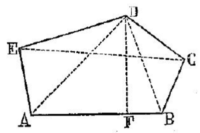
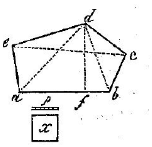


Fig. 35.



plus petite, dans laquelle, par exemple, le côté *ab* soit de 100 décimètres, si le côté AB est de 100 mètres, le côté *bc* de 45 décimètres, si BC est de 45 mètres ; et de conclure ensuite que si l'étendue de la figure réduite *abcde* est de 60 000 décimètres carrés, celle de la figure ABCDE doit être de 60 000 mètres carrés.

Mais, avant toutes choses, il faut savoir en quoi consiste la ressemblance ou similitude de deux figures.

34.

En quoi consiste la similitude de deux figures.

Pour peu qu'on y réfléchisse, on reconnaîtra bientôt que les deux figures ABCDE, *abcde* (*fig.* 34 et 35), pour être semblables, doivent être telles, que les angles A, B, C, D, E, de la grande soient égaux aux angles *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, de la petite, et que, de plus, les côtés *ab*, *bc*, *cd*, *etc.*, de la petite contiennent autant de parties *p* que les côtés AB, BC, CD, etc., de la grande contiennent de parties P.

35.

Les figures semblables ont les côtés homologues proportionnels.

Pour que deux figures soient semblables, les géomètres disent qu'il faut que les côtés AB, BC, CD (*fig.* 34, 35), etc., soient proportionnels aux côtés *ab*, *bc*, *cd*, *etc.* ; ou que le côté AB contienne *ab* de la même manière que BC contient *bc*, *etc.* ; ou que le côté AB soit aussi grand, par rapport à *ab*, que BC l'est par rapport à *bc*, *etc.* ; ou encore, qu'il y ait même raison ou même rapport entre AB et *ab* qu'entre BC et *bc* ; ou enfin, que AB soit à *ab* comme BC à *bc*, *etc.* Toutes ces expressions sont synonymes.

[...]

Cependant, pour écarter tout soupçon, démontrons que toutes les conditions que demande la similitude de deux figures sont nécessairement dépendantes les unes des autres ; ce qu'il nous sera facile de faire en examinant d'abord les triangles, qui sont les figures les plus simples, et qui entrent nécessairement dans la composition de toutes les autres ; examen qui nous conduira à toutes les propriétés et à tous les usages des figures semblables.

Fig. 36.

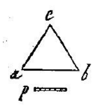
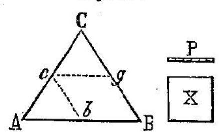


Fig. 37.



39.

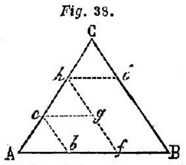
Deux triangles dont les angles sont respectivement égaux ont leurs côtés homologues proportionnels.

Maintenant démontrons que les côtés homologues, c'est-à-dire qui se répondent dans deux triangles *acb* et ACB (*fig.* 36 et 37), qui ont les mêmes angles, sont proportionnels.

Pour fixer nos idées, supposons d'abord que *ab* soit la moitié de AB ; il faudra que nous prouvions que *ac* sera aussi la moitié de AC, et *bc* la moitié de BC. Que *acb*, ainsi que dans le numéro précédent, ait encore la position A*cb* : si l'on mène *cg* parallèle à AB, il est clair que cette ligne égalera *b*B ou A*b*, et que *g*B égalera de même *cb*. Or, comme les angles C*gc* et C*cg* seront manifestement égaux aux angles *cb*A et *c*A*b*, le triangle C*cg* égalera le triangle *c*A*b* (30). Donc on aura C*c* égal à A*c*, et C*g* égal à *cb* ou à *g*B ; donc A*c* ou *ac* sera moitié de AC, et *cb* moitié de CB.

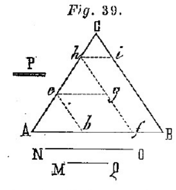
Si *ab* (*fig.* 36 et 38) était contenu trois, quatre, ou tel autre nombre de fois qu'on voudrait, dans AB, il serait également facile de démontrer que *ac* serait contenu le même nombre de fois dans AC, et *cb* dans CB. Car des points de division *b*, *f* de la base AB, menant *bc*, *fh*, *etc.*, parallèles à BC, on pourrait placer le long de AC, trois, quatre, etc., triangles A*cb*, *chg*, *h*C*i*, *etc.*, égaux aux triangles *acb*, A*cb*.

Fig. 38.



Mais que *ab* (*fig.* 36 et 39), au lieu d'être contenu exactement un certain nombre de fois dans AB, n'y fût contenu qu'avec quelque fraction, deux fois et demie par exemple, on prouverait que *ac* serait aussi contenu deux fois et demie dans AC, et *bc* deux fois et demie dans BC.

Fig. 39.



Car, lorsque par le moyen des parallèles *bc*, *fh*, on aurait placé le long de AC les deux triangles A*cb*, *chg*, égaux à *acb*, il resterait entre les deux parallèles *hf* et CB de quoi placer un triangle C*hi*, dont les côtés seraient moitié des côtés de *c*A*b* ; ce qui est évident, puisque, par la supposition, *f*B serait la moitié de A*b* et que la base *hi* du triangle C*hi* égalerait *f*B, à cause des parallèles *hf*, CB. Donc, en général, lorsque deux triangles ABC, *abc*, ont les mêmes angles, ces triangles, nommés *triangles semblables*, ont leurs côtés proportionnels, ou, ce qui revient absolument au même, les côtés AB, BC, AC, de l'un de ces triangles ABC contiennent le même nombre de parties P que les côtés *ab*, *bc*, *ac*, de l'autre triangle *abc* contiennent de parties *p*, P étant le décimètre, le mètre, etc., ou, en général, l'échelle avec laquelle ABC a été construit, et *p* celle dont on s'est servi en construisant *abc*.

40.

Diviser une ligne en autant de parties égales qu'on voudra.

De la proposition que nous venons de démontrer, se tire naturellement la solution d'un problème souvent utile dans la pratique.

[...]

Analyse et comparaison des deux textes

Nous allons désormais indiquer la façon dont nous exploitons ces textes avec les stagiaires. Il s'agit dans un premier temps d'expliciter la structure axiomatico-déductive des *Éléments* d'Euclide. Comme chacun des treize livres constituant l'ouvrage, le livre VI commence par une série de définitions. La première nous intéresse particulièrement puisqu'elle explicite ce que sont des figures rectilignes semblables (on dirait aujourd'hui polygones semblables), figures qui font précisément l'objet de ce livre : « les figures rectilignes semblables sont celles dont les angles sont égaux chacun à chacun et dont les côtés placés autour des angles égaux sont proportionnels ». Cette définition associée à quatre autres, mais également aux notions communes (ou axiomes) et aux demandes (ou postulats) ainsi qu'à toutes les propositions prouvées précédemment dans l'ouvrage, permet à Euclide de tirer de nouvelles propriétés.

Ainsi pour démontrer la proposition 2 du livre VI, dans laquelle nous reconnaissons le théorème des lignes proportionnelles, Euclide utilise la proposition 37 du livre I qui affirme que des triangles construits sur la même base et entre les mêmes parallèles sont égaux. Mais il a également recours à la propriété suivante : « si deux triangles ont même hauteur, alors ils sont entre eux comme leurs bases » (proposition 1 du livre VI). Autrement dit, si deux triangles ont la même hauteur, le rapport de leurs aires est égal au rapport de leurs bases. On pourrait donc dire, qu'à hauteur constante, l'aire d'un triangle est proportionnelle à la longueur de sa base. Évidemment, il n'est en aucun cas question chez Euclide de formule d'aire du triangle (du type moitié du produit de la base par la hauteur). Le fait que le rapport des aires des triangles BDE et ADE est égal au rapport des longueurs BD et DA, s'exprime en disant que « le triangle BDE est au triangle ADE comme BD est à DA ». Pour Euclide, un rapport de grandeurs ne se conçoit que si les grandeurs sont homogènes (deux longueurs, deux aires…) mais la comparaison de tels rapports est possible. Il va de soi que, pour le lecteur moderne, prouver une propriété de proportionnalité de longueurs en se ramenant à une comparaison d'aires peut paraître un peu déroutant, mais il s'agit là d'une pratique assez courante. Un livre des *Éléments* est d'ailleurs entièrement consacré à la méthode des aires qui consiste à transformer une figure en une figure d'aire égale. Le recours à des aires permet une utilisation efficace de cette méthode et notamment d'écrire, au cours de la preuve de la proposition 2, que « le triangle BDE sera égal au triangle CDE ». Notons enfin qu'Euclide énonce et démontre la réciproque de la propriété étudiée précédemment, à savoir : « si les côtés d'un triangle sont coupés proportionnellement, la droite qui joindra les sections sera parallèle au côté restant du triangle ». Ainsi, la proposition 2 dans son ensemble « permet de traduire par une égalité de rapports une situation géométrique, le parallélisme » comme le fait remarquer Évelyne Barbin (Barbin, 2012, p. 25) dans un article consacré à la proportionnalité.

Cette proposition revêt un caractère fondamental puisqu'elle permet la démonstration de la proposition 4 dans laquelle Euclide prouve un cas de similitude de deux triangles. Rappelons qu'il s'agit d'étudier les figures rectilignes [6] semblables,

6. Chez Euclide, le terme « figure rectiligne » correspond à la notion actuelle de « polygone »,

mais que, selon la définition euclidienne, deux critères sont requis : l'égalité des angles et la proportionnalité des longueurs des côtés. La proposition 4 permet donc de réduire à une seule condition la similitude dans le cas des triangles : s'ils sont équiangles (autrement dit si leurs angles sont deux à deux de même mesure) alors les longueurs de leurs côtés sont proportionnelles. Voilà qui est très intéressant dans la mesure où une figure rectiligne peut toujours être découpée en triangles.

Mais ce qui nous paraît remarquable dans ce texte, c'est la double façon dont Euclide exprime la proportionnalité contenue dans la figure qu'il a créée : d'une part, « BA est à DC comme BC est à CE et comme AC est à DE » (autrement dit, c'est la proportionnalité des longueurs des trois côtés qui est exprimée comme un agrandissement-réduction) et d'autre part « BC est à BA comme CE est à CD, BA est à AC comme DC est à DE... ». Dans cette deuxième traduction de la similitude, c'est l'homogénéité qui est en jeu. Si on utilise le registre des tableaux de proportionnalité, la première traduction exprime le passage d'une ligne à l'autre, tandis que la deuxième traduction exprime le passage d'une colonne à une autre.

triangle ABC	AB	BC	CA
triangle DCE	DC	CE	ED

Il est également très intéressant de souligner qu'Euclide n'emboîte pas les deux triangles (configuration de Thalès) pour prouver la proportionnalité des côtés des deux triangles. Le théorème de Thalès, qui n'est rien d'autre que l'expression de la similitude des triangles, cache un triangle dans l'autre. Au niveau didactique, la configuration euclidienne est plus parlante puisqu'on a une vision très nette des côtés homologues.

Si dans les *Éléments* d'Euclide, les figures rectilignes semblables sont définies avant toute proposition ou problème comme le demande la structure axiomatico-déductive de l'ouvrage, dans ceux de Clairaut, le recours aux figures semblables est justifié pour des raisons pratiques. Il s'agit de tirer des plans de terrains à l'échelle. La figure semblable à une figure donnée est vue comme une représentation de la réalité et c'est pour des raisons évidentes que Clairaut impose l'égalité des angles et la proportionnalité des longueurs des côtés. La définition euclidienne est ainsi contextualisée et motivée.

Comme Euclide, Clairaut s'intéresse au cas des triangles. En effet, pour les deux mathématiciens, le cas des triangles est fondamental car toute figure rectiligne peut être décomposée en triangles. Pour démontrer le critère de similitude, Clairaut s'appuie également sur le théorème des lignes proportionnelles, sans toutefois l'énoncer et le démontrer au préalable. C'est au cours de la preuve de la proposition énoncée dans le chapitre 39 que l'on reconnaît ce théorème, sous une forme moins globale que la proposition 2 d'Euclide. D'ailleurs, Clairaut comme d'autres (Arnauld, Descartes), rétablit l'antériorité de la ligne par rapport à la surface. Sa preuve ne s'appuie pas sur des rapports d'aires de triangles mais sur la considération de différents cas particuliers : du plus simple au plus complexe. Le premier cas est le cas où la longueur d'un côté d'un triangle est multiple de la longueur du côté homologue : la preuve procède en un découpage de la figure en des triangles égaux, grâce à un réseau de parallèles. Le second cas est le cas où la

vue en tant que surface.

longueur d'un côté est une fraction de la longueur du côté homologue : le principe est analogue. Mais Clairaut conclut sur la généralité du théorème sans considérer le cas où les deux côtés homologues sont incommensurables. Son raisonnement s'appuie sur l'évidence de la situation (en réalité il traite la question plus loin dans son traité, à la fin du livre II, en utilisant une méthode d'approximation).

Alors qu'Euclide traite de la question de façon globale grâce à une proposition intermédiaire utilisant la proportionnalité des aires de deux triangles à leur base lorsque leur hauteur est commune (cette propriété lui évitant de considérer les cas commensurables et incommensurables), Clairaut prend en considération la nature du rapport des deux longueurs. Ce faisant, il établit un lien entre le théorème des lignes proportionnelles et le numérique.

Bilan de l'analyse historique

Les textes que nous avons étudiés mettent en évidence le rôle fondamental du théorème des lignes proportionnelles dans un système axiomatico-déductif dont la finalité est la preuve du 3e cas de similitude des triangles. Il se place comme un maillon permettant l'étude des figures semblables.

La similitude des figures rectilignes étant définie (égalité des angles et proportionnalité des longueurs), le théorème des lignes proportionnelles permet de montrer que, dans le cas particulier des triangles, seul un des critères suffit (égalité des angles ou proportionnalité des longueurs des côtés). Ce théorème jouit donc d'une antériorité par rapport à la similitude des triangles qu'il serait sans doute bon de lui redonner également dans notre enseignement. Car hélas, à la lecture des programmes officiels du collège, il s'avère qu'il ne constitue pas en lui-même un objet d'étude.

Par ailleurs, le théorème des lignes proportionnelles assure un lien entre la problématique de la similitude en géométrie et la problématique de la mesure des grandeurs géométriques. Il permet en effet de traduire dans le domaine des grandeurs (voire des nombres, via la mesure), la caractérisation des formes des objets géométriques (du moins rectilignes). À ce propos, Rudolf Bkouche écrit (Commission inter-IREM collège, 1995, p. 11) :

> « Ainsi le théorème de Thalès [7] assure la liaison entre la problématique de la similitude et la problématique de la mesure [...]. Cela explique le rôle joué par ce théorème dans le développement de la géométrie élémentaire ; celle-ci étant essentiellement une théorie de la mesure des grandeurs géométriques, le théorème de Thalès permet de ramener l'étude de la forme des objets géométriques à des considérations de grandeur. »

Enfin, ce théorème n'a pas seulement un intérêt théorique. Il a également un intérêt pratique. C'est le tracé des parallèles qui permet de transposer la proportionnalité des longueurs d'une ligne sur une autre. Il permet donc, dans des situations non numérisées, de reproduire le partage d'un segment donné sur un

7. Le théorème de Thalès dont Rudolf Bkouche parle dans son article est le théorème des lignes proportionnelles tel que nous l'avons défini dans cet article.

autre segment (à la règle et au compas) : il s'agit là du découpage d'un segment dans une proportion donnée comme le montre le chapitre 40 des *Éléments* de Clairaut. D'autre part, il permet la construction d'un segment dont la longueur est le produit ou le quotient de deux longueurs données, ainsi que la quatrième proportionnelle, comme nous le voyons dans *La Géométrie* de Descartes.

Conclusions

Comme nous l'avons montré, la configuration de Thalès (cf. figure 1) est porteuse de difficultés car de très nombreuses égalités de rapports peuvent être déduites. Chacune de ces égalités renvoyant à une certaine traduction de la proportionnalité contenue dans la figure :

- aspect « lignes proportionnelles » ou division d'un segment : $\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC}$ et sa conséquence $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$;
- aspect agrandissement-réduction (coefficient de proportionnalité) : $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$;
- aspect homogénéité de la proportionnalité : $\frac{AM}{AN} = \frac{AB}{AC}$, $\frac{AN}{MN} = \frac{AC}{BC}$ et $\frac{MN}{AM} = \frac{BC}{AB}$
- aspect projection : $\frac{AM}{AN} = \frac{MB}{NC} = \frac{AB}{AC}$.

Cette configuration fait une synthèse entre, au moins, deux aspects de la proportionnalité : d'une part, la proportionnalité des sections formées par le tracé de la parallèle (théorème des lignes proportionnelles) et d'autre part, la proportionnalité des côtés dans les deux triangles (valeur absolue du rapport d'homothétie ou rapport d'agrandissement-réduction). En France, seul le deuxième aspect est mis en évidence par la façon dont on énonce le théorème de Thalès dans notre enseignement. Ce théorème ne paraît pas apporter de plus-value par rapport à l'utilisation du cas de similitude des triangles, d'autant qu'il est réducteur à une situation bien particulière des deux triangles. Il paraît même, au vu des productions des élèves, apporter plus de difficultés que de bénéfices.

Or la configuration de Thalès possède un aspect agrandissement-réduction utile pour comprendre l'homothétie (et en premier lieu l'homothétique d'un segment). Le théorème de Thalès peut être vu comme une transition entre le théorème des lignes proportionnelles et l'homothétie. Sa présence dans les programmes de collège se trouve, selon nous, confortée par le fait que l'homothétie est elle-même abordée en fin de cycle 4.

À l'issue de cette étude, nous proposons de repenser la structuration des notions tout au long du cycle 4 autour de celle de figures semblables, un peu à la façon de Clairaut. Les figures rectilignes semblables (ou polygones semblables) étant définies et motivées par la problématique de la réduction à l'échelle, une première question se pose : la réduction des deux conditions (angles et proportionnalité des longueurs) à une seule. On constate rapidement que cette réduction à une condition n'est pas possible pour les quadrilatères puisque, par exemple, tous les rectangles sont équiangles sans être pour autant tous semblables (en particulier, ils ne sont pas tous carrés !). En revanche, ceci est possible dans le cas des triangles, et uniquement dans ce cas, via le théorème des lignes proportionnelles (en admettant ce théorème dans sa généralité). Dans cette optique, il faudrait bannir le théorème de Thalès tel que nous le connaissons dans un premier temps. Ce théorème n'est pas utile pour résoudre des problèmes de calcul de longueur, puisqu'on peut toujours se ramener à la similitude des triangles plus générale. En résumé, il pourrait être plus pertinent d'introduire la configuration de Thalès plutôt que le théorème lui-même. En revanche, dans cette configuration un théorème pourrait être énoncé à l'aide des triangles semblables : « dans un triangle, si on trace une droite parallèle à l'un des côtés alors on détermine un deuxième triangle semblable au premier ». Une telle version aurait l'avantage d'éviter la justification systématique du fait que, dans une configuration de Thalès, les triangles sont équiangles.

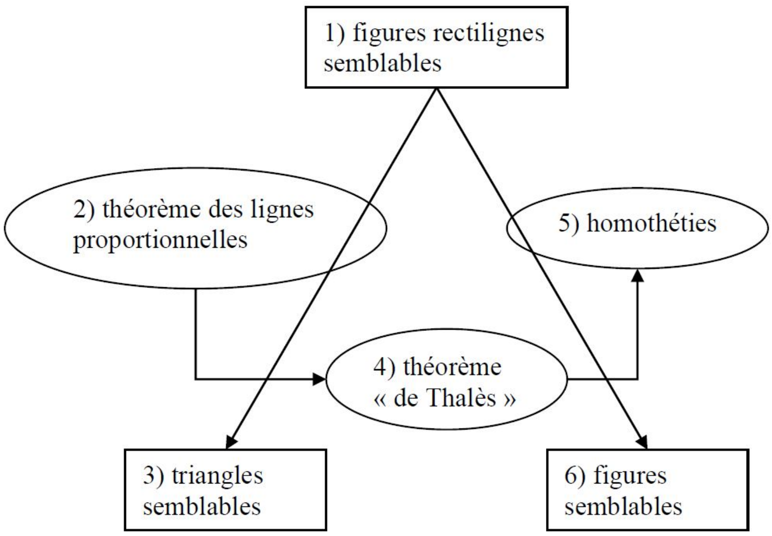


Figure 9 – Schéma de la réorganisation proposée pour le cycle 4.

La deuxième question qui se pose alors est d'étendre la similitude des figures à des figures non rectilignes (notamment les cercles). Cette extension est possible grâce à l'homothétie, comme le rappelle Dominique Bénard (Barbin, 2014, p. 53-54) en évoquant la question de l'agrandissement et de la réduction des figures dans l'histoire :

> « Quels critères théoriques permettent de décider si deux figures planes sont semblables ou non, et que veut dire alors ce terme "semblable" ? Une des premières réponses à cette question est formulée par Michel Chasles dans son *Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie*, paru en 1837. [...] Évoquant et listant ce qu'il appelle les "méthodes qui constituent la Géométrie récente", notamment concernant "la transformation des figures en d'autres fi-

> gures", il cite d'abord la perspective, puis "la méthode qui consiste à faire croître, dans un rapport constant, les rayons visuels menés aux différents points d'une figure, pour former une figure semblable et semblablement placée". C'est lui qui proposera d'appeler homothétiques les deux figures semblables ; ainsi obtenues par cette transformation, appellation qui sera reprise par ses contemporains et s'imposera dans les manuels de mathématiques de l'enseignement secondaire français dans la seconde moitié du XIX^e siècle. »

Mais pour construire la notion de segments homothétiques, il peut être intéressant de passer par la configuration de Thalès (c'est à cette occasion que le théorème peut être évoqué). Nous pouvons résumer tout cela par un schéma dans lequel le théorème de Thalès réalise la synthèse entre l'aspect lignes proportionnelles et l'aspect homothétie (figure 9).

Comme nous l'avons souligné, nous estimons que l'accent doit être mis sur l'utilisation de la similitude des triangles, mais en laissant l'élève traduire la proportionnalité de différentes façons, comme le fait Euclide. Il ne nous paraît pas intellectuellement acceptable que les élèves soient encouragés à utiliser des procédures variées lorsqu'il s'agit de résoudre un problème de proportionnalité dans le domaine du numérique (retour à l'unité, coefficient de proportionnalité, homogénéité, égalité des produits en croix...) et qu'ils soient enfermés dans un carcan, notamment celui du théorème de Thalès, dans le domaine de la géométrie. Pour cela, le registre des tableaux de proportionnalité peut s'avérer particulièrement utile. Plutôt que de contraindre ses élèves à écrire et utiliser une égalité de rapports « canonique », le professeur gagnerait à expliciter les principales façons d'exprimer la proportionnalité contenue dans une configuration de Thalès et à montrer que des rapports de proportionnalité différents sont en jeu.

Enfin, nous estimons que, au niveau didactique, il serait intéressant de commencer par faire une large place au théorème des lignes proportionnelles par le biais d'exercices progressifs soulignant son intérêt évident, à la fois en termes pratique et théorique. C'est ce théorème qui permet le mieux de visualiser l'idée de la proportionnalité en géométrie et de construire progressivement des égalités de rapports. L'un des exercices les plus fondamentaux est de placer, sans instrument et sur papier quadrillé, un point sur un segment donné (dont les extrémités sont des nœuds du quadrillage) et partageant ce segment dans une proportion donnée : ce point peut être le milieu du segment ou situé à un tiers d'une extrémité, etc. On passe alors au partage d'un segment donné en un nombre donné de divisions : sans instrument si le segment donné est tracé sur papier quadrillé avec ses extrémités placées en des nœuds, avec la règle et le compas si le segment donné est tracé sur papier blanc. Ensuite, on peut demander de reporter à la règle et au compas une division sur un segment donné sur un autre segment.

Nous pensons formateur de proposer des problèmes de construction variés dans lesquels aucune mesure de longueur n'est donnée. En s'exerçant de la sorte, l'élève se construira une image mentale de la proportionnalité en géométrie basée sur un geste : le tracé de parallèles. Comme l'écrit Évelyne Barbin, « quand le savoir se construit à partir de l'activité de l'élève qui résout des problèmes, le sentiment d'évidence doit être pris en compte et la rigueur doit prendre sens à partir de cette activité » (Barbin, 1991, p. 130). Car si l'enjeu essentiel de l'enseignement de la géométrie au collège est bien de faire passer l'élève d'une géométrie instrumentée à une géométrie déductive, nous considérons que cet enseignement ne peut se construire sans prendre en compte l'évidence et l'intuition. Dans une situation donnée, l'élève ne sait peut être pas reconnaître deux triangles semblables ou le théorème de Thalès, ni le formaliser, mais il sait que « c'est de la proportionnalité » !

Références bibliographiques

Sources primaires

Clairaut Alexis, 1753, *Élémens de géométrie*, Paris, David.

Clairaut Alexis, 1853, *Éléments de géométrie, Nouvelle édition mise en accord avec le système décimal*, Paris, Jules Delalain.

Descartes René, 1664, *La Géométrie*, Paris, Charles Angot.

Euclide, 1804, *Les Éléments*, trad. François Peyrard, Paris, Albert Blanchard.

Euclide, 1990, *Les Éléments*, trad. par Bernard Vitrac et introduction générale par Maurice Caveing, Paris, PUF.

Lacroix Sylvestre F, 1799, *Élémens de géométrie*, Paris, Imprimerie de Crapelet.

Lacroix Sylvestre F, 1855, *Éléments de géométrie*, Paris, Mallet-Bachelier.

Sources secondaires

Barbin Évelyne (dir.), 2012, *Des mathématiques éclairées par l'histoire. Des arpenteurs aux ingénieurs*, Paris, Vuibert Adapt-Snes.

Barbin Évelyne (dir.), 2014, *Les constructions géométriques avec des instruments et des gestes*, Paris, Ellipses.

Barbin Évelyne, 1991, « Les *Éléments de géométrie* de Clairaut : une géométrie problématisée », *Repères IREM*, n°4, p. 119-133.

Barbin Évelyne, 2011 « Pourquoi les contemporains de Descartes n'ont-ils pas compris sa *Géométrie* de 1637 ? ». *Circulation, transmission, héritage, Actes du 18^{me} colloque inter-IREM histoire et épistémologie des mathématiques*, Université & IREM de Basse-Normandie, p. 449-464.

Boyer Carl Benjamin, 1968, *A History of Mathematics*, New-York, Wiley and Sons.

Chevalarias Nathalie, 2018, « Instruments et méthodes de dessin : de la géométrie pratique vers l'enseignement secondaire au début du XX^{e} siècle ». *Les mathématiques et le réel : expériences, instruments, investigations*, Rennes, PUR, p. 79-94.

Commission Inter-IREM collège, 1995, « Autour de Thalès », IREM de Lyon.

Commission Inter-IREM d'épistémologie et d'histoire des mathématiques & IREM de Basse-Normandie, 2015, *Si le nombre m'était conté…*, Paris, Ellipses.

Dahan-Dalmedico Amy et Peiffer Jeanne, 1986, *Une histoire des mathématiques, Routes et dédales*, Paris, Seuil.

Escofier Jean-Pierre, 2008, *Histoire des mathématiques*, Paris, Dunod.

Herreman Alain, « Aux sources du théorème de Thalès », http://thamous.univ-rennes1.fr/forums/forums/42/exportIrem/ (consulté le 02/11/2019).

Lebossé Camille et Hémery Corentin, *Alègre et géométrie*, 1951, Classe de troisième des cours complémentaire, Paris, Fernand Nathan.

Rouche Nicolas, 1992, *Le sens de la mesure*, Bruxelles, Didier-Hatier.